

ÜBER FUNKTIONENTHEORETISCHE METHODEN IN DER RÄUMLICHEN ELASTIZITÄTSTHEORIE

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

DR. RER. NAT.

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Sebastian Bock

geboren am 31. Juli 1978 in Schlema.

Gutachter:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Klaus Gürlebeck (Mentor)

Prof. catedrático Helmuth Robert Malonek

Prof. Dr.-Ing. Michael Vormwald

Tag der mündlichen Prüfung:

4. Dezember 2009

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von Oktober 2005 bis Juni 2009 mit der Unterstützung eines zweijährigen Promotionsstipendiums der Graduiertenförderung des Freistaates Thüringen und ab März 2008 im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Angewandte Mathematik der Bauhaus-Universität Weimar.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all den Menschen bedanken, die in irgendeiner Art und Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Mentor Prof. Klaus Gürlebeck für die hervorragende wissenschaftliche Betreuung und Förderung, die offenen und zielführenden Diskussionen sowie die gewährte persönliche Freiheit bei der Bearbeitung und Umsetzung neuer Ideen.

Herrn Prof. Helmuth R. Malonek möchte ich sehr herzlich für die langjährige Zusammenarbeit danken, welche meine wissenschaftliche Laufbahn sehr wesentlich geprägt hat. Herrn Prof. Michael Vormwald danke ich für die Erstellung des Gutachtens, die hilfreichen Diskussionen und Hinweise zur Arbeit sowie seine Bereitschaft, eine gemeinsame Sprache zu finden.

Darüber hinaus danke ich allen (ehemaligen) Kollegen am Fachbereich Mathematik der Bauhaus-Universität Weimar für die fachliche Unterstützung, die kollegiale Arbeitsatmosphäre und nicht zuletzt für den entgegengebrachten Respekt. Besonders dankbar bin ich Herrn Peter Milde für seine Bemühungen, meine mathematische Ausbildung frühzeitig zu fördern. Des Weiteren danke ich Monika Schwitalla für ihre tiefgehende Freundschaft und so manchen guten Rat. Dr. Katrin Wender und Isabel Viehmann danke ich für das sorgfältige Korrekturlesen des Manuskripts und die wertvollen Hinweise.

Nicht zuletzt danke ich meiner lieben Familie und meinen Freunden. Die persönliche Unterstützung und der Rückhalt in den vergangenen Jahren haben mir immer sehr viel Kraft und Zuversicht gegeben. Ein ganz besonders herzlicher Dank gebührt schließlich Feliciana Almeida für die kompromisslose Unterstützung, das entgegengebrachte Verständnis und ihre Liebe.

„Wie ist es möglich, dass die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?“

Albert Einstein

Kurzfassung

Die Behandlung von geometrischen Singularitäten bei der Lösung von Randwertaufgaben der Elastostatik stellt erhöhte Anforderungen an die mathematische Modellierung des Randwertproblems und erfordert für eine effiziente Auswertung speziell angepasste Berechnungsverfahren.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der systematischen Verallgemeinerung der *Methode der komplexen Spannungsfunktionen* auf den Raum, wobei der Schwerpunkt in erster Linie auf der Begründung des mathematischen Verfahrens unter besonderer Berücksichtigung der praktischen Anwendbarkeit liegt. Den theoretischen Rahmen hierfür bildet die Theorie quaternionenwertiger Funktionen. Dementsprechend wird die *Klasse der monogenen Funktionen* als Grundlage verwendet, um im ersten Teil der Arbeit ein räumliches Analogon zum *Darstellungssatz von Goursat* zu beweisen und *verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formeln* zu konstruieren.

Im Hinblick auf die vielfältigen Anwendungsbereiche der Methode beschäftigt sich der zweite Teil der Arbeit mit der lokalen und globalen Approximation von monogenen Funktionen. Hierzu werden *vollständige Orthogonalsysteme monogener Kugelfunktionen* konstruiert, infolge dessen neuartige Darstellungen der kanonischen Reihenentwicklungen (*Taylor, Fourier, Laurent*) definiert werden. In Analogie zu den komplexen Potenz- und Laurentreihen auf der Grundlage der holomorphen z -Potenzen werden durch diese *monogenen Orthogonalreihen* alle wesentlichen Eigenschaften bezüglich der *hyperkomplexen Ableitung* und der *monogenen Stammfunktion* verallgemeinert.

Anhand repräsentativer Beispiele werden die qualitativen und numerischen Eigenschaften der entwickelten funktionentheoretischen Verfahren abschließend evaluiert. In diesem Kontext werden ferner einige weiterführende Anwendungsbereiche im Rahmen der räumlichen Funktionentheorie betrachtet, welche die speziellen Struktureigenschaften der monogenen Potenz- und Laurentreihenentwicklungen benötigen.

Abstract

In structural mechanics, boundary value problems with geometrical singularities require advanced mathematical modeling techniques and especially adapted numerical methods in order to obtain a precise description of the singular near field.

This doctoral thesis deals with a systematic approach to a spatial analog of the *method of complex stress functions*. Here, the main focus is on the generalization of the mathematical method in consideration of the practical applicability. The theoretical framework is therefore constituted by methods of hypercomplex function theory in particular the theory of quaternion-valued functions. Thus, the *class of monogenic functions* is methodically used in the first part of the thesis to prove a spatial counterpart of *Goursat's representation theorem* that enables the construction of *generalized Kolosov-Muskhelishvili formulae* in three dimensions.

The second part of the thesis is concerned with the local and global approximation of monogenic functions. In this context, new monogenic representation formulae of the canonical series expansions (*Taylor, Fourier, Laurent*) are defined by using *complete orthogonal systems of solid spherical monogenics*. These *monogenic orthogonal series* generalize the important structural properties of the complex-one-dimensional power and Laurent series expansions concerning the *hypercomplex derivative* and the *monogenic primitive*.

Finally, representative examples are studied to evaluate the function-theoretical methods constructed here by means of their qualitative and numerical characteristics. In this connection, some further fields of application in the framework of hypercomplex function theory are considered, which essentially need the specific structural properties of the monogenic power and Laurent series expansions.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	v
Symbolverzeichnis	vii
Einleitung	1
1 Grundlagen der mathematischen Elastizitätstheorie	13
1.1 Mechanik räumlicher Kontinua	13
1.1.1 Spannungen und äußere Lasten	14
1.1.2 Deformationen und Verschiebungen	18
1.1.3 Konstitutive Beziehungen	20
1.1.4 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	21
1.1.5 Grundgleichungen der ebenen Elastizitätstheorie	23
1.2 Randwertprobleme der Elastostatik	25
1.3 Zusammenfassung	27
2 Funktionentheoretische Methoden in der Ebene und im Raum	29
2.1 Methode der komplexen Spannungsfunktionen	31
2.2 Grundlagen der räumlichen Funktionentheorie	35
2.2.1 Der Schiefkörper \mathbb{H} reeller Quaternionen	36
2.2.2 Räume \mathbb{H} -wertiger Funktionen	38
2.2.3 Die Klasse der \mathbb{H} -holomorphen Funktionen	41
2.3 Konstruktion räumlicher Kolosov-Muskhelishvili Formeln	54
2.3.1 Allgemeine Lösung nach Papkovic-Neuber	55
2.3.2 Der Darstellungssatz von Goursat in \mathbb{H}	57

2.3.3	Darstellung der Spannungs- und Verschiebungskomponenten mit Hilfe monogener Funktionen	60
2.3.4	Verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Ver- schiebungen	65
2.3.5	Verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formeln für die Span- nungen	65
2.4	Zusammenfassung	69
3	Reihenentwicklungen \mathbb{H}-holomorpher Funktionen	73
3.1	Eine polynomiale Basis auf der Grundlage der Fueter-Polynome . . .	77
3.2	Orthogonalreihenentwicklungen monogener Kugelfunktionen	84
3.2.1	Ein System harmonischer Kugelfunktionen	85
3.2.2	Ein System monogener Kugelfunktionen	87
3.2.3	Differentielle Eigenschaften der Systeme homogener Polynome	88
3.2.4	Konstruktion einer \mathbb{R} -linearen Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome	97
3.2.5	Konstruktion einer \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome	106
3.2.6	Ableitungen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen	113
3.2.7	Orthogonale Zerlegung des Hilbert-Raumes $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H})$	116
3.2.8	Stammfunktionen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen	119
3.2.9	Monogene Appell-Systeme und Taylorentwicklung	125
3.2.10	Rekursionsformeln für die monogenen Basissysteme	134
3.2.11	Äußere monogene Funktionen und Laurentreihen	139
3.3	Zusammenfassung	151
4	Approximationsansätze für Problemstellungen der räumlichen Elas- tizitätstheorie	155
4.1	Konstruktion einer polynomialen Lamé-Basis	156
4.2	Unbestimmtheitsgrad der Funktionen Φ und Ψ	163
4.2.1	Vorgabe des Spannungszustandes	164
4.2.2	Vorgabe der Verschiebungskomponenten	166
4.2.3	Eindeutige Bestimmung von Φ und Ψ bei vorgegebenen Span- nungen und Verschiebungen	168
4.3	Zusammenfassung	168

5	Numerische Beispiele und weitere Anwendungen	171
5.1	Approximation der Kelvin-Lösung	172
5.1.1	Evaluierung der Konvergenzeigenschaften	172
5.1.2	Evaluierung der Stabilitätseigenschaften	175
5.2	Faktorisierung des Laplace-Operators	181
5.3	Charakterisierung des Dirichlet-Raumes	184
5.4	Monogene Laurentreihenentwicklungen	187
5.5	Zusammenfassung	189
	Zusammenfassung und Ausblick	191
	Literaturverzeichnis	197
	Curriculum Vitae	209
	Publikationen	211

Abbildungsverzeichnis

1.1	Definition der Spannungskomponenten (a) am Volumenelement und (b) bezüglich einer beliebigen Schnittfläche mit Normalenvektor n . . .	15
3.1	Das linear unabhängige System der verallgemeinerten Potenzen. . . .	82
3.2	Strukturschema der Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$	105
3.3	Strukturschema der Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$	112
3.4	Strukturelle Eigenschaften der Appell-Polynome \check{A}_n^l	128
3.5	Abbildungseigenschaften der Differentialoperatoren ∂_0 und $\bar{\partial}_c$	130
3.6	Vollständige Orthonormalsysteme innerer und äußerer homogener \mathbb{H} - holomorpher Funktionen.	142
5.1	Geometrie- und Materialparameter für die Approximation der Kelvin- Lösung.	173
5.2	Relativer L^2 -Fehler bei der Approximation der Kelvin-Lösung. . . .	174
5.3	Nebenbedingungen für die Konstruktion einer Lamé-Basis auf der Grundlage der verallgemeinerten Potenzen.	178
5.4	Konditionszahl der Gramschen Matrix.	179
5.5	Gramsche Matrix und Eigenwertanalyse für die Δ -Faktorisierung. . .	182

Tabellenverzeichnis

3.1	Eigenschaften der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome bezüglich des \mathbb{R} -wertigen inneren Produktes (2.5), mit $h, k, l, m = 1, \dots, n + 1$. .	99
-----	--	----

Symbolverzeichnis

Lineare Elastizitätstheorie

$\mathbf{p} := (X, Y, Z)^T$	Vektor der äußeren Volumenkräfte
$\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})^T$	Vektor der Normal- bzw. Schubspannungskomponenten
$\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}} := (\overset{n}{\sigma}_x, \overset{n}{\sigma}_y, \overset{n}{\sigma}_z)^T$	Spannungsvektor bezüglich eines Flächenelementes mit der Normalen n
$\boldsymbol{\varepsilon} := (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})^T$	Vektor der Normal- bzw. Schubverzerrungskomponenten
e	Volumendehnung
$\mathbf{u} := (u, v, w)^T$	Vektor der Verschiebungskomponenten
\mathbf{E}	Materialmatrix
$\mathbf{D}_e, \mathbf{D}_k$	Differentialoperatoren für Gleichgewicht und Kinematik
E	Elastizitätsmodul
ν	Querdehnzahl
G	Schubmodul
λ, μ	Lamésche Konstanten
\varkappa, α	Materialkonstanten

$\mathcal{U}(\Phi, \Psi)$	verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Verschiebungen
$\mathcal{S}_I(\Phi, \Psi)$	I. verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen
$\mathcal{S}_{II}(\Phi, \Psi)$	II. verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen
$\mathcal{S}_{III}(\Phi, \Psi)$	III. verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen

Algebraische und topologische Bezeichnungen

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	n dimensionaler euklidischer Vektorraum, $n \geq 2$
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{H}	Schiefkörper der reellen Quaternionen
\mathcal{A}	reell-linearer Unterraum von \mathbb{H}
Ω	Gebiet im \mathbb{R}^n , offen und stückweise glatt berandet
Ω_ξ	Kugelschale im \mathbb{R}^3
S^2	Einheitssphäre im \mathbb{R}^3
S_ρ^2	Sphäre im \mathbb{R}^3 mit Abstand ρ vom Ursprung
\mathbb{B}_2	Einheitskreisscheibe im \mathbb{R}^2
\mathbb{B}_3 bzw. \mathbb{B}_3^+	Einheitskugel im \mathbb{R}^3

$\overline{\mathbb{B}}_3^+$	Abschließung der Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}}_3^+ := \mathbb{B}_3^+ \cup S^2$
\mathbb{B}_3^-	Komplement der abgeschlossenen Einheitskugel $\mathbb{B}_3^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathbb{B}}_3^+$
$\overline{\mathbb{B}}_3^-$	Komplement der Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}}_3^- := \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_3^+$
x, y, z	kartesische Koordinaten
r, θ, φ	Kugelkoordinaten
ω	Element der Einheitssphäre S^2
\mathbf{i}	imaginäre Einheit
$z = x_0 + x_1 \mathbf{i}$	komplexe Zahl, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$
$\mathbf{Re}(z)$	Realteil der komplexen Zahl z
$\mathbf{Im}(z)$	Imaginärteil der komplexen Zahl z
\bar{z}	die zu z konjugiert komplexe Zahl
$ z $	Betrag von z
$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Standardbasis in \mathbb{H}
$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^3 a_i \mathbf{e}_i$	Quaternion, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, 3$
$\mathbf{Sc}(\mathbf{a})$	Skalarteil der Quaternion \mathbf{a}
$\mathbf{Vec}(\mathbf{a})$ bzw. $\underline{\mathbf{a}}$	Vektorteil der Quaternion \mathbf{a}
$\bar{\mathbf{a}}$	die zu \mathbf{a} konjugierte Quaternion
$ \mathbf{a} $	Betrag der Quaternion \mathbf{a}
$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^2 x_i \mathbf{e}_i$	reduzierte Quaternion bzw. Punkt im \mathbb{R}^3 , $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$
$\mathbf{z}_i = x_i - x_0 \mathbf{e}_i$	Fueter-Variablen, mit $i = 1, 2$

Funktionenräume

Betrachtet werden Funktionen $f : G \rightarrow Y$, $G \subset X$, wobei

$$X \text{ gleich } \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{A}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad Y \text{ gleich } \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{A}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^n$$

sein kann, jeweils mit der üblichen euklidischen Metrik versehen.

$C(G; Y)$	Raum aller auf G stetigen Funktionen
$C^m(G; Y)$	Raum aller auf G m -mal reell stetig differenzierbaren Funktionen
$C^\infty(G; Y)$	Raum aller Funktionen f auf G , welche alle Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzen
$L^2(G; Y)$	Hilbert-Raum aller Funktionen f , für die $ f $ quadratisch integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes dV auf G ist
$L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{R})$	\mathbb{R} -linearer Hilbert-Raum quadratisch integrierbarer \mathbb{H} -wertiger Funktionen in Ω ausgestattet mit dem \mathbb{R} -wertigen inneren Produkt
$L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H})$	\mathbb{H} -linearer Hilbert-Raum quadratisch integrierbarer \mathbb{H} -wertiger Funktionen in Ω ausgestattet mit dem \mathbb{H} -wertigen inneren Produkt
$\mathcal{H}_n(S^2)$	Raum aller \mathbb{R} -wertigen harmonischen Kugelfunktionen auf S^2 vom Grad n
$\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; K)$ bzw. $\mathcal{M}_n^+(\mathbb{H}; K)$	Raum der \mathbb{H} -holomorphen homogenen Polynome vom Grad n in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; K) \cap \ker \bar{\partial}$, mit $K = \mathbb{R}, \mathbb{H}$
$\mathcal{M}_n^-(\mathbb{H}; K)$	Raum der \mathbb{H} -holomorphen homogenen Funktionen vom Homogenitätsgrad $-(n+2)$ in $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}; K) \cap \ker \bar{\partial}$, mit $K = \mathbb{R}, \mathbb{H}$

Differential- und Primitivierungsoperatoren

$\bar{\partial}$	(verallgemeinerter) Cauchy-Riemann-Operator in \mathbb{C} (bzw. \mathbb{H})
∂	konjugierter (verallgemeinerter) Cauchy-Riemann-Operator in \mathbb{C} (bzw. \mathbb{H})
$\Delta = \partial\bar{\partial}$	Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
$\bar{\partial}_i = \frac{1}{2}\overline{\partial\mathbf{e}_i}$	rotierte verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Operatoren, mit $i = 0, 1, 2$.
$\partial_i = \frac{1}{2}\partial\mathbf{e}_i$	rotierte konjugierte verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Operatoren, mit $i = 0, 1, 2$.
∂_z	komplexe Ableitung
∂_0	hyperkomplexe Ableitung
∂_0^n	n -fache Anwendung der hyperkomplexe Ableitung
$\bar{\partial}_{\mathbb{C}}$	Differentialoperator, definiert auf den monogenen Konstanten
$\bar{\partial}_{\mathbb{C}}^n$	n -fache Anwendung des Differentialoperators $\bar{\partial}_{\mathbb{C}}$
\mathcal{P}_z	Primitivierungsoperator auf der Grundlage der holomorphen z -Potenzen
$\mathcal{P}_{z,i}$	Primitivierungsoperator auf der Grundlage der Fueter-Polynome, mit $i = 0, 1, 2$
$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$	Primitivierungsoperator auf der Grundlage der Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$
$\mathcal{P}_{\mathbb{H}}$	Primitivierungsoperator auf der Grundlage der Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$

Polynomiale Ansatzsysteme und spezielle Funktionen

z^n	homogene holomorphe Polynome vom Grad n , orthogonal in $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $n \in \mathbb{N}_0$
\tilde{z}^n	homogene holomorphe Polynome vom Grad n , orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $n \in \mathbb{N}_0$
$\tilde{z}^\nu := \mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}$	Fueter-Polynome vom Grad $ \nu $, mit $ \nu = \nu_1 + \nu_2$, Parameter $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}_0$
P_{n+1}	Legendre-Polynome vom Grad $n+1$, Parameter $n \in \mathbb{N}_0$
P_{n+1}^m	assoziierte Legendre-Funktionen, Parameter $m = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$
U_{n+1}^m, V_{n+1}^l	harmonische Kugelfunktionen, Parameter $m = 0, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$
$r^{n+1}U_{n+1}^m, r^{n+1}V_{n+1}^l$	homogene harmonische Polynome vom Grad n , Parameter $m = 0, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$
X_n^m, Y_n^l	\mathbb{H} -holomorphe Kugelfunktionen, Parameter $m = 0, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$
$r^n X_n^m, r^n Y_n^l$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynome vom Grad n , Parameter $m = 0, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\mathbf{A}^{m,n}, \mathbf{B}^{m,n}, \mathbf{C}^{m,n}$	Koeffizientenfunktionen
$X_{n,j}^{m,\dagger}, Y_{n,j}^{l,\dagger}$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynome vom Grad n , rechtsseitig multipliziert mit \mathbf{e}_j , Parameter $m = 0, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\tilde{X}_{n,j}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,j}^{l,\dagger}$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynome vom Grad n , rechtsseitig multipliziert mit \mathbf{e}_j und normiert bezüglich \mathbb{B}_3 , Parameter $m = 0, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$

$\begin{matrix} 1^0 & 2^m & 3^m & 4^0 \\ \varphi_n, & \varphi_n, & \varphi_n, & \varphi_n, \\ 5^l & 6^l & & \end{matrix}$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynome vom Grad n , orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $m = 1, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kompakte Mengenschreibweise $\varphi_{n,\mathbb{R}}^k$
$\begin{matrix} 1^0 & 2^m & 3^m \\ \psi_n, & \psi_n, & \psi_n \end{matrix}$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynome vom Grad n , orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $m = 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, kompakte Mengenschreibweise ψ_n^k
$\varphi_{n,\mathbb{H}}^l$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynome vom Grad n , orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $l = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\widehat{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l}$	die zu $\varphi_{n,\mathbb{H}}^l$ korrespondierenden homogenen \mathbb{H} -anti-holomorphen Polynome vom Grad n , orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \partial$, Parameter $l = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Funktionen vom Homogenitätsgrad $-(n+2)$, orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $l = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$
A_n^l	homogene \mathbb{H} -holomorphe Appell-Polynome vom Grad n , orthogonal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $l = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\widehat{A_n^l}$	die zu A_n^l korrespondierenden homogenen \mathbb{H} -anti-holomorphen Appell-Polynome vom Grad n , orthogonal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \partial$, Parameter $l = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$
$A_{-(n+2)}^l$	homogene \mathbb{H} -holomorphe Appell-Funktionen vom Homogenitätsgrad $-(n+2)$, orthogonal in $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, Parameter $l = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$
$E_1(z)$	Cauchy-Kernfunktion in \mathbb{C}
$E_2(\mathbf{x})$	Cauchy-Kernfunktion in \mathbb{H}
\mathcal{K}	Kelvin-Transformation in \mathbb{H}

Einleitung

Die Bestimmung von Spannungs- und Verschiebungsfeldern im Bereich von geometrischen Singularitäten, welche in erster Linie durch Einkerbungen, Risse, Einschlüsse oder durch andere Defekte in der Tragstruktur hervorgerufen werden, und die Ableitung praxisrelevanter Kenngrößen sind zentrale Gegenstände der Bruchmechanik. Neben der rechnergestützten Simulation des gestörten Materialverhaltens liegt die große Bedeutung für das Ingenieurwesen insbesondere in der realitätsnahen Erfassung des Schädigungszustandes bzw. des Schädigungsfortschritts eines Bauteils und den daraus ableitbaren Aussagen zur Versagenswahrscheinlichkeit und Lebensdauer des Tragwerks.

Eine geometrische Singularität, wie zum Beispiel eine Rissspitze, stellt mathematisch gesehen eine Unstetigkeit in der unverformten Struktur dar, was zur Folge hat, dass die Spannungsgrößen im Nahfeld der Störung unbeschränkt groß werden können. Für die Charakterisierung des Rissausbreitungsvorganges sind daher im Speziellen die Gegebenheiten an der Rissspitze von entscheidender Bedeutung und müssen folglich durch geeignete Rissmodelle, welche das lokale Materialverhalten (linear elastisch, elastisch-plastisch, linear viskoelastisch, et al.) im Rissspitzennahfeld berücksichtigen, erfasst werden. Eine alleinige Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines Kontinuumsmodells durch Spannungs- und Verzerrungsgrößen reicht daher nicht aus und wird durch die Definition zusätzlicher Kenngrößen, wie zum Beispiel der Spannungsintensitätsfaktoren oder der Energiefreisetzungsrate, welche den lokalen Rissspitzenzustand bzw. das globale Verhalten bei Rissausbreitung näher charakterisieren, erweitert. Die Bestimmung dieser die Singularität näher charakterisierenden Größen, welche Rückschlüsse auf ein Fortschreiten der Schädigung erlauben, ist Hauptgegenstand gegenwärtiger Forschungsaktivitäten.

Die analytisch exakten Verfahren für ebene Rissprobleme bilden den theoretischen Ausgangspunkt der Bruchmechanik. Sehr gute einführende Übersichten hier-

zu finden sich in [Heckel 1983, Anderson 1991, Rolfe & Barson 1987] oder [Broek 1974]. Die Grundlagen der mechanischen Modelle für Probleme der linear elastischen Bruchmechanik wurden im Wesentlichen in den Arbeiten von A.A. GRIF-FITH [Griffith 1921] und G.R. IRWIN [Irwin 1958] definiert, in denen durch die Grenzwertbetrachtung eines kreisförmigen Einschlusses in einem halbbunendlichen Halbraum die klassischen $1/\sqrt{r}$ Spannungssingularitäten an der Rissspitze definiert wurden. Mathematische Grundlagen stammen von G.W. KOLOSOV [KolosoV 1909], H.M. WESTERGAARD [Westergaard 1939] und N.I. MUSKHELISHVILI [Muskhelishvili 1971]. Durch die Methode der komplexen Spannungsfunktionen wird die Lösung eines ebenen Randwertproblems der Elastostatik auf die Bestimmung zweier holomorpher (analytischer) Funktionen zurückgeführt. Den theoretischen Hintergrund bildet dabei der Satz von Goursat, wonach sich jede biharmonische Funktion (Airy-sche Spannungsfunktion) eindeutig durch zwei holomorphe Funktionen ausdrücken lässt. Durch Potenz- bzw. Laurentreihenansätze dieser holomorphen Funktionen in der komplexen Variable z werden exakte Lösungen der Differentialgleichung für die Verschiebungen bzw. Spannungen konstruiert, welche die Ordnung der Singularität exakt widerspiegeln und im Nahfeld der Störung die Lösung der Randwertaufgabe sehr genau approximieren. Die unbekannten Koeffizienten der Reihenentwicklungen werden dabei durch eine Eigenwertanalyse oder durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt. Dieses klassische Verfahren ist anwendbar auf geometrisch einfache Konfigurationen (Punktsingularität im Raum oder Halbraum, gerade Risse im Halbraum, et al.).

Um praxisrelevante Geometrien behandeln zu können, kommen Methoden der konformen Abbildung zur Anwendung. Eine Abbildung wird als konform bezeichnet, wenn diese winkel- und orientierungstreu oder mit anderen Worten biholomorph ist. Dabei macht man sich die Invarianz des Laplace-Operators unter konformen Abbildungen zu nutze, um ein in einem geometrisch kompliziert berandeten Gebiet gegebenes Randwertproblem mit den zugehörigen Randbedingungen auf ein geometrisch einfacheres Gebiet (in der Regel ist das der Einheitskreis bzw. die Einheitskreisscheibe) abzubilden, das Problem dort zu lösen und mit Hilfe der Umkehrabbildung die Rücktransformation der Lösung in das Ausgangsgebiet zu berechnen. Die Verwendung exakter analytischer Verfahren für ebene Randwertprobleme mit Lösungssingularitäten ist sehr effizient, da bereits durch eine geringe Anzahl von Reihengliedern sehr gute Approximationen für die Nahfeldlösung erzielt werden können.

Qualitativ gesehen zeichnen sich diese Ansätze insbesondere dadurch aus, dass jeder Approximationsschritt eine exakte Lösung der Differentialgleichung und damit einen mechanisch möglichen Zustand des Systems repräsentiert. Alle Modelleigenschaften bleiben somit im Nahfeld der Diskontinuität erhalten. Ein weiterer nicht zu unterschätzender Vorteil bei der Arbeit mit exakten Lösungen der Differentialgleichung besteht darin, dass im Fall auftretender Singularitäten „automatisch“ die „richtigen“ Singularitäten verwendet werden, da sie dem Differentialgleichungsmodell innewohnen. Bei der Verwendung anderer geeigneter Ansatzfunktionen, die aber nicht die Differentialgleichung lösen, muss vorher die auftretende Ordnung der Singularität bestimmt werden. Eine umfangreiche, aber nichttriviale mathematische Theorie steht dafür zur Verfügung, wie im Überblick verschiedener Zugänge den Arbeiten [Rossmann & Sändig 1996, Apel et al. 2002, Mazya & Rossmann 2004, Mazya & Kozlov 2005, Nicaise & Sändig 2007] entnommen werden kann. Nicht zuletzt sind diese exakten Verfahren auch aus analytischer Sicht sehr vorteilhaft, da durch die komplexe Funktionentheorie sehr effiziente Werkzeuge für die nachträgliche Auswertung im Lösungsraum zur Verfügung stehen. Ein für die praktische Anwendung sehr wesentlicher Vorteil ist etwa, dass die Spannungsintensitätsfaktoren mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel nun wegunabhängig berechnet werden können.

Die in der klassischen Bruchmechanik entwickelten, analytisch geschlossenen Lösungen beschränken sich jedoch in der Regel auf bestimmte Idealisierungen für die Grenzfälle unendlicher oder halbbunendlicher Bereiche oder aber auf geometrisch einfach berandete Gebiete. Die Ursachen hierfür sind vor allem beträchtliche mathematische Schwierigkeiten bei der exakten Erfüllung der Randbedingungen der Ansätze. Neuere Methoden legen daher den Schwerpunkt bei der Lösung von Randwertproblemen mit Singularitäten auf die Verwendung von algorithmisch hochoptimierten, numerischen Standardverfahren, wie etwa Finite Elemente Verfahren (FEM¹) oder Randintegralmethoden (BEM²). Jedoch ist man auch hier bestrebt, die qualitativen und methodischen Vorteile der analytisch exakten Verfahren in die Ansätze einfließen zu lassen. Neben der Integration von singulären Anteilen in eine rein numerische Formulierung des Lösungsansatzes bzw. adaptiven Verfahren zur Fehlerkontrolle im Bereich der Singularität werden zunehmend auch hybride Verfahren zur Lösungsfindung angewendet. Als erstes Verfahren muss im Kontext dieser Arbeit die Er-

¹engl. Finite Element Method

²engl. Boundary Element Method

weiterte Finite Elemente Methode (XFEM³) genannt werden. Auf der Grundlage gemischter Elementansätze werden die klassischen Ansatzfunktionen für das Verschiebungsfeld der Finiten Elemente um spezielle Ansatzterme erweitert, was eine verbesserte Abbildung der Antwortgrößen für bruchmechanische Probleme erwarten lässt. Methodisch geht man dabei so vor, dass die kontinuierlichen Weggrößenansätze der Elemente entlang des Risspfades mit diskontinuierlichen Ansätzen, welche die Diskontinuität in der Verschiebungsfunktion exakt oder hinreichend genau beschreiben, angereichert werden. Für die Elemente in denen sich eine Rissspitze befindet, werden außerdem Funktionen, welche die $1/\sqrt{r}$ Singularität im Spannungsfeld an der Rissspitze abbilden, hinzuaddiert [Belytschko & Black 1999, Moes et al. 1999]. Die Methode der komplexen Spannungsfunktionen dient dabei als ein wesentlicher Zugang, um allgemeine oder spezielle Anreicherungsfunktionen für die XFEM zu generieren. Die Finiten Elemente mit angereicherten Ansatzfunktionen weisen dann zusätzliche Freiheitsgrade in den Knotenpunkten auf, wodurch die Rissgeometrie nicht durch eine explizite Anpassung der FE-Vernetzung beschrieben werden muss. Mit der XFEM können somit sehr effizient Rissfortschrittsprobleme numerisch simuliert werden [Areias & Belytschko 2005].

Eine andere Methode geht in den Grundzügen auf die Arbeit von E. TREFFTZ [Trefftz 1926] zurück und ist den gekoppelten numerisch-analytischen Verfahren zuzuordnen. Dabei werden spezielle Ansatzfunktionen für die Konstruktion der Näherungslösungen verwendet, welche die Differentialgleichung im jeweiligen Teilgebiet bereits exakt erfüllen. Die freien Koeffizienten in diesen Ansätzen werden durch eine Fehlerminimierung auf dem Rand bestimmt. Bei realen Körpern bedeutet das einen hohen (numerischen) Aufwand für die Berechnung der Oberflächenintegrale. Da die Lösungen der betrachteten Differentialgleichungen nicht lokal sein können, erwachsen in der Regel aus der Arbeit mit globalen Ansatzfunktionen häufig Probleme hinsichtlich der numerischen Stabilität. Ein an diese Situation angepasster Zugang geht davon aus, dass ein Trefftz-Ansatz nur in der Nähe der Singularität zur Anwendung gebracht wird. Spezielle Finite Elemente⁴, welche die singuläre Differentialgleichung und das lokale Lösungsverhalten im Gebiet bereits exakt erfüllen, werden dabei nach Außen mit finiten Standardelementen verknüpft [Tong et al. 1973, Piltner 1982; 1986, Teixeira & Ji 1996a;b, Dhanasekar et al. 2006]. Die Grundlage

³engl. Extended Finite Element Method

⁴sog. Hybride Finite Elemente

dieses so genannten Hybriden Weggrößenverfahrens bilden nebenbedingungsfreie Variationsformulierungen (Erweitertes Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials), bei denen voneinander unabhängige Ansätze für die Funktionsverläufe sowohl in den Teilgebieten als auch auf den Elementrändern gemacht werden können. Die Anpassung der gewählten Verläufe aus dem Gebietsinneren an die Verschiebungsfunktion auf dem Rand ist dann integraler Bestandteil des Näherungsverfahrens und wird im Speziellen durch einen Erweiterungsterm, welcher die Minimierung des Energiepotentials entlang des Kopplungsrandes beinhaltet, realisiert. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der exakten Abbildung und Charakterisierung des lokalen Lösungsverhaltens, wie beispielsweise der Spannungsfreiheit an den Innenrändern bei Löchern, im Nahfeld der Diskontinuitäten bzw. Singularitäten. Nachteile des Verfahrens resultieren aus der meist stückweise linearen oder quadratischen Kopplung der Berechnungsverfahren, wodurch die Übergangsbedingungen im Allgemeinen nur in den Netzknoten exakt erfüllt werden. Im restlichen Bereich der Übergänge können Sprünge in den primären Beschreibungsgrößen entstehen, welche bei Betrachtung der Energienorm als maßgebliches Fehlerkriterium zwar nicht ins Gewicht fallen, die zu lösende Randwertaufgabe in Bezug auf das mechanische Verhalten im Übergangsbereich jedoch signifikant verändern.

Für die lineare Elastizitätstheorie und Bruchmechanik stellt die Methode der komplexen Spannungsfunktionen ein grundagentheoretisch sehr bedeutendes Verfahren dar. Einerseits lassen sich durch diesen Zugang für eine große Aufgabenklasse analytisch exakte Lösungen der Differentialgleichung konstruieren, welche als geschlossene Lösungen oder als Anreicherungsfunktionen für numerische Verfahren Anwendung finden. Andererseits stehen durch die komplexe Funktionentheorie sehr effiziente Werkzeuge, wie zum Beispiel orthogonale Potenz- und Laurentreihenentwicklungen, die Cauchysche Integralformel oder eine Residuentheorie, für die Auswertungen im Lösungsraum bereit. Eine Erweiterung und Anwendung des Verfahrens auf ebene Probleme der nicht-linearen Elastizitätstheorie wurde in den Arbeiten [Bondar 2000, Alexandrovich & Sheina 2006, Alexandrovich & Gorlova 2007] und [Bogdanova 2007] studiert. In modifizierter Form wird die Methode der komplexen Spannungsfunktionen außerdem für spezielle Problemstellungen in den Material- und Werkstoffwissenschaften eingesetzt, wie etwa bei der Modellierung und Berechnung elastischer Kompositmaterialien [Basheleishvili 1997; 1999a;b] oder bei der Be-

trachtungen von Rissproblemen in piezo-elektrischen Materialien [Sosa 1991, Park & Sun 1995].

Versuche, dieses Vorgehen auf den dreidimensionalen Fall zu übertragen, konnten mit der im ebenen Fall sehr gut ausgebauten Theorie nicht Schritt halten. Erwähnt werden muss hier die Darstellungsformel von Papkovic-Neuber [Papkovic 1932, Neuber 1934], bei der Lösungen für das Verschiebungsfeld mit Hilfe von vier harmonischen Funktionen konstruiert werden. Nimmt man als Ausgangspunkt harmonische Polynome, so ergeben sich auch polynomiale Lösungen der Lamé-Gleichung, die unter Einbeziehung der Randbedingungen zur Approximation der Verschiebungen benutzt werden können. Ein solcher Zugang ist zum Beispiel in [Bauch 1981] studiert worden. Eine exakte Berechnung gelingt wieder nur für geometrisch sehr einfache Konfigurationen. Wenig studiert ist die Einbeziehung harmonischer Funktionen mit Singularitäten, so dass diese Ansätze gegenwärtig kaum benutzt werden. Eine direkte Verwendung in numerischen Verfahren, wie beispielsweise in Trefftz-Verfahren gestaltet sich auf Grund von Stabilitätsproblemen schwierig und aufwendig. Eine einfache Transformation auf allgemeinere geometrische Situationen ist bisher nicht möglich. Ein Hauptproblem dürfte im Fehlen einer geeigneten Verallgemeinerung der Airyschen Spannungsfunktion liegen, aus der dann alle benötigten Informationen gewonnen werden können. Einige wenige Ansätze mit Hilfe von p -analytischen Funktionen [Polozhij 1973, Goman 1984] oder reeller Quaternionen [Pimenov & Pushkarev 1991, Tsalik 1995] sind bekannt, im Vergleich zur ebenen Theorie jedoch wenig praktikabel.

Beginnt man mit möglichen Verallgemeinerungen an der Basis, so hat man zunächst nach räumlichen Verallgemeinerungen der \mathbb{C} -wertigen holomorphen Funktionen zu suchen. Eine solche Funktionenklasse steht mit der Klasse der hyperholomorphen (monogenen) Funktionen zur Verfügung. Nach einigen Vorarbeiten von 1930-1950 begann in den 1970'er Jahren eine systematische Untersuchung [Brackx et al. 1982]. Monogene Funktionen werden gewöhnlich als Lösungen der Dirac-Gleichung oder eines verallgemeinerten Cauchy-Riemann Systems eingeführt. Beide Zugänge lassen sich auf frühere Arbeiten zum so genannten Riesz-System (cf. [Stein & Weiss 1968]) zurückführen, welches ebenfalls als verallgemeinertes Cauchy-Riemann System betrachtet wurde und sehr ähnlich zum komplexen, eindimensionalen Fall ist. In \mathbb{C} lässt sich die Klasse der holomorphen Funktion bekanntermaßen auch auf anderen Wegen äquivalent definieren, wie etwa über die komplexe Differenzierbar-

keit oder über Potenzreihenentwicklungen. Für monogene Funktionen sucht man im Höherdimensionalen nach einer ähnlichen Charakterisierung, um diese durch verallgemeinerte Potenzreihenansätze explizit beschreiben und approximieren zu können. Bereits im Jahr 1935 wurde durch R. FUETER [Fueter 1935] bewiesen, dass sich eine monogene (quaternionenwertige) Funktion lokal in eine Taylorreihe bezüglich der symmetrischen Potenzen entwickeln lässt. Diese lokale Darstellung monogener Funktionen wurde auch in [Brackx et al. 1982] zur Beschreibung der Funktionenklasse und vielfach als technisches Hilfsmittel bei der Beweisführung eingesetzt. Im Jahr 1990 konnte dann durch H.R. MALONEK [Malonek 1990] bewiesen werden, dass monogene Funktionen äquivalent durch ihre Taylorreihenentwicklung bezüglich der verallgemeinerten Potenzen⁵ und außerdem durch die hyperkomplexe Differenzierbarkeit definiert werden können. In der Arbeit [Gürlebeck & Malonek 1999] wurde die hyperkomplexe Differenzierbarkeit monogener Funktionen auf beliebige reelle Raumdimensionen verallgemeinert und der Zusammenhang zwischen der hyperkomplexen Ableitung und dem adjungierten verallgemeinerten Cauchy-Riemann Operator gezeigt. Eine Zusammenfassung dieses Zugangs mit umfangreichen Referenzen zu anderen Arbeiten findet sich in [Gürlebeck et al. 2006]. Im Vergleich zur ebenen Theorie werden jedoch nur einige Eigenschaften der komplexen Taylorreihe auf den höherdimensionalen Fall verallgemeinert. Ein wesentlicher Vorteil für das praktische Arbeiten mit holomorphen Funktionen ist etwa, dass die komplexe Taylorreihe die Eigenschaft einer Orthogonalreihe besitzt. Da die Ansatzfunktionen der komplexen Fourierreihe bezüglich der Einheitskreisscheibe ebenfalls⁶ auf dem vollständigen System der komplexen z -Potenzen basieren, kann der Zusammenhang zwischen der lokalen und globalen Approximation holomorpher Funktionen unmittelbar über die Entwicklungskoeffizienten der Reihen hergestellt werden. Im Weiteren lassen sich auch die komplexe Ableitung und die Stammfunktion holomorpher Funktionen als Orthogonalreihen darstellen, indem ausschließlich auf den Koeffizienten der ursprünglichen Potenzreihenentwicklung der Funktion operiert wird. Die Taylorreihe der verallgemeinerten Potenzen besitzt jedoch keine dieser Eigenschaften, da diese bereits die Grundvoraussetzung einer Orthogonalreihe nicht erfüllt. In [Abul-Ez & Constaes 2003] und folgenden Arbeiten konnte eine orthogonale Taylorreihe

⁵Die verallgemeinerten Potenzen unterscheiden sich von den in [Fueter 1935] verwendeten symmetrischen Potenzen nur durch einen reellen Faktor

⁶bis auf einen reellen Normierungsfaktor

definiert werden. Der Bezug zur hyperkomplexen Ableitung und die strukturellen Eigenschaften der Reihe wurden bei diesem Zugang jedoch nicht studiert. Auch existiert eine Vielzahl verschiedener Ansätze für die globale Approximation monogener Funktionen durch orthogonale Polynome. In den meisten Fällen wird auch hier der Zusammenhang zur lokalen Darstellbarkeit und damit zur Taylorreihe nicht näher betrachtet. Im Kontext dieser Arbeit werden jedoch vollständige Orthonormalsysteme benötigt, welche einen direkten Bezug zur hyperkomplexen Ableitung besitzen und damit die lokale und globale Approximation monogener Funktionen unmittelbar in Beziehung setzen. Ferner werden explizite und praktisch handhabbare Systeme gesucht, welche die komplexe Theorie auch aus formaler Sicht verallgemeinern. Einige dieser Probleme konnten durch die in den Arbeiten [Cação 2004, Cação et al. 2004] konstruierten vollständigen Orthonormalsysteme monogener Kugelfunktionen gelöst werden. Ähnlich wie im Komplexen ließen sich die hyperkomplexe Ableitung und ein kontinuierlicher Primitivierungsoperator auf der zugehörigen Fourierreihe definieren. Die wichtige Eigenschaft der Orthogonalreihe ging bei diesen Ansätzen (q.v. [Cação et al. 2006, Cação & Gürlebeck 2006]) jedoch erneut verloren. Ferner gelang es mit diesem System die Taylor- und Fourierkoeffizienten der genannten Reihen explizit in Beziehung zu setzen, was aber aufgrund fehlender Orthogonalitätseigenschaften der verallgemeinerten Potenzen auf sehr umfangreiche Formeln (q.v. [Cação 2004, Gürlebeck & Morais 2007]) führte.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Klasse der monogenen Funktionen eine Reihe von Analogien zur Klasse der holomorphen Funktion aufweist. Aus formaler Sicht stehen so mächtige Werkzeuge wie die genannten Taylor- und Fourierreihenentwicklungen, aber auch Laurentreihenentwicklungen und eine Cauchysche Integralformel (q.v. [Brackx et al. 1982]) zur Verfügung. In [Gürlebeck & Sprößig 1989; 1997] wurde beispielsweise eine Theorie zur Lösung verschiedener Randwertaufgaben entwickelt, die dann in [Kravchenko & Shapiro 1996] und [Kravchenko 2003] zur Lösung spezieller Feldgleichungen der mathematischen Physik benutzt wurde. Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie fügen sich in diese Theorie ein. Am speziellen Problem elastischer Einschlüsse in einem anderen elastischen Material wurde in [Gürlebeck 1993] die Anwendbarkeit der Theorie demonstriert. In den strukturellen Eigenschaften unterscheiden sich die hyperkomplexen Ansätze teilweise sehr deutlich von den komplexen Zugängen, was eine praktische Übertragung der komplexen Methodik auf einen konkreten Anwendungsfall sehr erschwert und in

manchen Fällen sogar unmöglich macht.

Die Motivation und Zielstellung dieser Arbeit lässt sich damit im Wesentlichen durch zwei Hauptaufgaben formulieren:

Verallgemeinerung der Methode der komplexen Spannungsfunktionen auf den räumlichen Fall. Ziel dabei ist, die Lösung der Grundgleichungen der räumlichen linearen Elastizitätstheorie mit Hilfe der Klasse der monogenen Funktionen explizit zu beschreiben und geschlossene, analytisch exakte Lösungsdarstellungen der Differentialgleichung abzuleiten. Eine systematische Verallgemeinerung der strukturellen sowie funktionentheoretischen Eigenschaften der komplexwertigen Kolosov-Muskhelishvili Gleichungen wird angestrebt.

Entwicklung geeigneter funktionentheoretischer Werkzeuge. Es sind spezielle und an die praktische Problemstellung angepasste Potenz- und Laurentreihenentwicklungen monogener Funktionen zu entwickeln. In erster Linie werden explizite, einfach zu erzeugende Ansatzsysteme gesucht, welche gute numerische und strukturelle Eigenschaften (Orthogonalreihen, Zusammenhang zwischen lokaler und globaler Approximation) besitzen. Eine formale und methodische Analogie zur komplexen Theorie ist wünschenswert.

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel unterteilt, welche sich im Einzelnen mit den folgenden Schwerpunkten befassen:

Kapitel 1 In diesem ersten Kapitel werden die Grundlagen der mathematischen Elastizitätstheorie bereitgestellt, welche insbesondere in den darauf folgenden Kapiteln für die Konstruktion und die Nachweise der in dieser Arbeit entwickelten Verfahren benötigt werden. Anhand eines räumlichen Kontinuumsmodells werden die systembeschreibenden Differentialgleichungen der Mechanik eines linear elastischen, homogenen, isotropen Körpers in ihren Grundzügen hergeleitet und die Sonderfälle des ebenen Spannungs- und Verzerrungszustandes angegeben. Wesentliche Invarianzeigenschaften in den Bestimmungsgrößen werden eingeführt.

Kapitel 2 Dieses Kapitel befasst sich mit der methodischen Verallgemeinerung der ebenen Kolosov-Muskhelishvili Formeln auf den Raum. Einführend wird die Methode der komplexen Spannungsfunktionen kurz skizziert und die für

den räumlichen Fall notwendigen Anforderungen und Werkzeuge daraus abgeleitet. Auf der funktionentheoretischen Grundlage der Algebra reeller Quaternionen \mathbb{H} wird dann ein verallgemeinerter Darstellungssatz von Goursat bewiesen, welcher die Lösung der räumlichen Bipotentialgleichung mit zwei \mathbb{H} -holomorphen Funktionen in Beziehung setzt. Unter Verwendung des Darstellungssatzes werden abschließend räumliche Verallgemeinerungen der Kolosov-Muskhelishvili Formeln für die Verschiebungen und Spannungen konstruiert, welche das Hauptresultat dieses Kapitels darstellen. Die sowohl methodische als auch formale Analogie der erhaltenen Gleichungen zur Methode der komplexen Spannungsfunktionen wird verdeutlicht.

Kapitel 3 Hauptgegenstand dieses Kapitels sind verallgemeinerte Potenz- und Laurentreihenentwicklungen monogener Funktionen, die bei der Approximation der in den räumlichen Darstellungsformeln auftretenden Potentialfunktionen Anwendung finden. Zwei wesentliche Zugänge werden betrachtet. Zum einen das vollständige System verallgemeinerter Potenzen mit der bekannten Taylorreihenentwicklung und zum anderen das vollständige System monogener Kugelfunktionen auf der Grundlage \mathbb{R} -wertiger harmonischer Kugelfunktionen. Die Betrachtungen zum letztgenannten System stellen dabei den wesentlichen Schwerpunkt des Kapitels dar. Auf der Grundlage eines neuartigen Konstruktionsprinzips werden im Weiteren die folgenden funktionentheoretischen Resultate bewiesen:

- Vollständige Orthonormalsysteme homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome für das Gebiet der Einheitskugel.
- Fourierreihenentwicklungen monogener Funktionen, deren Ableitung und Stammfunktion erneut auf Orthogonalreihen führen.
- Vollständige Orthonormalsysteme homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome für die Teilräume der orthogonalen Zerlegung des Hilbert-Raumes quadratisch integrierbarer \mathbb{H} -wertiger Funktionen.
- Vollständige Appell-Mengen homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome und (orthogonale) Taylorreihenentwicklung. Die Entwicklungskoeffizienten beider Orthogonalreihen (Fourier, Taylor) werden unmittelbar in Beziehung gesetzt.

- Rekursionsformeln für die vollständigen Orthonormal- bzw. Appell-Systeme homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome.
- Vollständige Orthonormal- und Appell-Systeme homogener \mathbb{H} -holomorpher Funktionen für das Außengebiet der Einheitskugel.
- Orthogonale Laurentreihenentwicklung homogener \mathbb{H} -holomorpher Funktionen für das Kugelschalengebiet mit direktem Bezug zur monogenen Taylorreihe sowie zur Integralformel von Cauchy.

Die Analogien der ausnahmslos explizit erhaltenen Resultate zu den entsprechenden Basissystemen und Reihenentwicklungen in \mathbb{C} werden aufgezeigt.

Kapitel 4 Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Approximation von Randwertproblemen der räumlichen Elastizitätstheorie auf der methodischen Grundlage der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln. Aufbauend auf die Resultate in den Kapiteln 2 und 3 wird eine polynomiale Lamé-Basis für den Raum der quadratisch integrierbaren Lösungen der homogenen Lamé-Gleichung konstruiert. Zudem werden die in den räumlichen Darstellungsformeln auftretenden Potentialfunktionen mit Hilfe der Struktureigenschaften der Basissysteme in Kapitel 3 näher charakterisiert und hinsichtlich ihres Unbestimmtheitsgrades untersucht.

Kapitel 5 In diesem abschließenden Kapitel werden einige numerische Beispiele betrachtet, anhand derer die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren getestet und evaluiert werden. Hauptaugenmerk liegt dabei auf den Konvergenz- und Stabilitätseigenschaften der Ansatzsysteme bei der Lösung von Randwertproblemen der linearen Elastizitätstheorie. Weiterführend werden außerdem einige funktionentheoretische Anwendungsbereiche diskutiert.

Kapitel 1

Grundlagen der mathematischen Elastizitätstheorie

„Anfänge von heute müssen mit Vorlagen von gestern vorlieb nehmen.“

Manfred Hinrich

In diesem einführenden Kapitel werden die Grundlagen der mathematischen Elastizitätstheorie bereitgestellt, welche den Ausgangspunkt und die Konstruktionsgrundlage für die funktionentheoretischen Ansätze bilden. Da im Rahmen dieser Arbeit eine vollständige Darstellung der bekannten Grundgesetze der linearen Elastizitätstheorie nicht möglich ist, beschränken sich die Ausführungen im Wesentlichen auf die für die Herleitung und Nachweisführung benötigten Gesetzmäßigkeiten. Gegenstand der Betrachtungen ist dabei ein räumliches Kontinuumsmodell, für welches die systembeschreibenden Gleichungen der Mechanik eines linear elastischen, isotropen Körpers hergeleitet und wichtige Eigenschaften angegeben werden. Um die Analogie zur Methode der komplexen Spannungsfunktionen herauszuarbeiten, werden im Weiteren auch die Sonderfälle des ebenen Spannungszustandes und des ebenen Verzerrungszustandes eingeführt. Eine umfassende Darstellung der Elastizitätstheorie sowie ein kompakter Abriss über die geschichtliche Entwicklung finden sich beispielsweise im klassischen Lehrbuch [Love 1927].

1.1 Mechanik räumlicher Kontinua

Kontinuumsmodelle sind physikalische Ersatzmodelle für das makroskopische Verhalten von Stoffen, wie Festkörper, Flüssigkeiten oder Gase. Hierbei wird, unter

gewissen Voraussetzungen und Annahmen, die heterogene Mikrostruktur des jeweiligen Stoffkörpers vernachlässigt und eine kontinuierliche Verteilung der Stoffeigenschaften in jedem Punkt des betrachteten Gebietes angenommen. Das bedeutet, dass alle stofflichen Eigenschaften des Gesamtkörpers auch an jedem infinitesimal kleinen Element betrachtet werden können. Somit lassen sich physikalische Größen, wie beispielsweise Energie oder Momente, aus Grenzprozessen näherungsweise ermitteln und systembeschreibende Differentialgleichungen für spezielle Kontinuumsmodelle ableiten. Die generelle Anwendbarkeit bzw. Gültigkeit des Kontinuumsansatzes ist dabei jedoch stark abhängig von der gegebenen physikalischen Problemstellung und der zu betrachtenden Skala, die modelliert werden soll. Prinzipiell können all diejenigen Materialien als Kontinua betrachtet werden, deren physikalisches Verhalten auf der Mikroebene sehr klein gegenüber der Dimension des Ausgangsproblems ist, wie zum Beispiel die Deformation bei Festkörpern.

Gegenstand dieser Arbeit ist ein räumliches Kontinuumsmodell für einen linear elastischen, isotropen, homogenen Festkörper. Der physikalische Zustand des Kontinuums wird dabei über vier Variablengruppen beschrieben: die *inneren* und *äußeren Kraftgrößen*, gewöhnlich als Spannungen σ und äußere Lasten \mathbf{p} bezeichnet, sowie die *inneren* und *äußeren Weggrößen*, welche bekanntlich den Verzerrungen ϵ und den Verschiebungen \mathbf{u} entsprechen. Diese sind im allgemeinen Fall über drei gekoppelte Differentialgleichungen: Gleichgewichtsbeziehung, Kinematik und Konstitutive Gleichung miteinander verknüpft, welche als *Grundgesetze der linearen Elastizitätstheorie* zusammengefasst werden. Im Folgenden werden diese bekannten Beziehungen nochmals kurz in ihren Grundzügen hergeleitet, da sie eine wichtige Konstruktionsgrundlage für die umfangreichen Berechnungen zu den verallgemeinerten funktionentheoretischen Ansätzen darstellen. Die Herleitung orientiert sich dabei im Wesentlichen an den Bezeichnungen und Ausführungen in [Muskhelishvili 1971].

1.1.1 Spannungen und äußere Lasten

Elastostatische Untersuchungen haben im Allgemeinen das Ziel, aus bekannten äußeren Belastungen eines Körpers die inneren Kräfte und die daraus resultierenden Verformungen zu berechnen. Dabei unterteilt man die äußeren Lasten in *Spannungskräfte*, welche an Flächenelementen im Inneren des Körpers oder auf Teilen der Oberfläche angreifen, und in *Volumenkräfte*, die sich räumlich verteilt auf Volumenelemente des Körpers beziehen. Die äußeren Lasten erzeugen in einem sich im Gleichgewicht

befindlichen Körper aufgrund des Newtonschen Gegenwirkungsprinzips in jedem inneren, infinitesimal kleinen Flächenelement dS eine resultierende Spannungskraft σdS . Der Spannungsvektor σ hängt dabei von der Lage und Orientierung des Flächenelementes im Körper, d.h. von der Richtung der Flächennormale n ab. Aufgrund dieser Abhängigkeit ist für die Berechnung der Spannungen eines beliebig orientierten Flächenelementes die Kenntnis der Spannungen von drei aufeinander senkrecht stehenden Flächen, die sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden, notwendig. Als Ersatzsystem dient hierbei ein aus dem betrachteten Körper herausgeschnittenes Quaderelement, dessen Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen verlaufen. Die freigeschnittenen Spannungskomponenten

$$\left. \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

charakterisieren den Spannungszustand in der Umgebung eines betrachteten Punktes vollständig und werden ferner in *Normalspannungen*¹ und *Schubspannungen*² unterteilt (q.v. Abbildung 1.1a). Der Zusammenhang zwischen den Spannungskom-

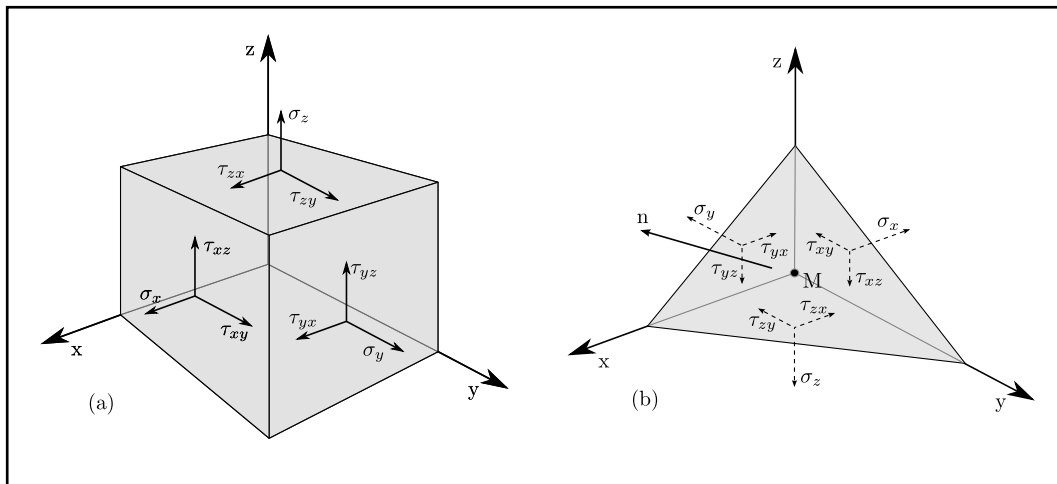


Abbildung 1.1: Definition der Spannungskomponenten (a) am Volumenelement und (b) bezüglich einer beliebigen Schnittfläche mit Normalenvektor n .

¹Spannungen normal zur Angriffsfläche

²Spannungen tangential zur Angriffsfläche

ponenten (1.1) und einer beliebigen durch einen Punkt M gehenden Schnittfläche wird dann durch folgende Hilfskonstruktion realisiert. Durch den Punkt M werden drei zu den Koordinatenebenen parallele Schnittflächen gelegt. Eine vierte Ebene mit dem Normalenvektor n und dem Abstand h vom Punkt M wird so eingeführt, dass diese zur betrachteten Schnittfläche parallel ist (q.v. Abbildung 1.1b).

Da sich nach Voraussetzung der betrachtete Körper im Gleichgewicht befindet, muss sich der resultierende Vektor aller auf das Tetraeder wirkender Kräfte zu Null ergeben. Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ liefert infolge des Kräftegleichgewichts am unendlich kleinen Tetraeder die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \overset{n}{\sigma}_x &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z), \\ \overset{n}{\sigma}_y &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{zy} \cos(n, z), \\ \overset{n}{\sigma}_z &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Die skalaren Spannungsgrößen $\overset{n}{\sigma}_x$, $\overset{n}{\sigma}_y$ und $\overset{n}{\sigma}_z$ bezeichnen Komponenten eines Spannungsvektors $\overset{n}{\sigma}$, welche sich im Gegensatz zum kartesischen Bezugssystem auf ein Flächenelement mit der Normale n beziehen. Betrachtet man nun das Gleichgewicht des Gesamtkörpers bezüglich jeder Schnittebene, so stehen im räumlichen Fall für die Erfüllung des Kräfte- und Momentengleichgewichtes insgesamt sechs Gleichungen zur Verfügung. Die Bedingung, dass die Projektionen des resultierenden Vektors der äußeren Volumenkräfte $\mathbf{p} := (X, Y, Z)^T$ auf die Koordinatenachsen mit den Spannungen (1.2) im Inneren des Körpers im Gleichgewicht stehen, liefert ein System von drei gekoppelten Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

welche als *Gleichgewichtsbedingungen* bezeichnet werden. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Spannungskomponenten stetig sind und stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung besitzen. Neben der Forderung nach Kräftegleichgewicht am Gesamtkörper muss sich zudem das resultierende Moment der äußeren Kräfte bezüglich der Koordinatenachsen zu Null ergeben. Dies liefert die zusätzlichen Beziehungen

zwischen den Spannungskomponenten:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Folglich lässt sich der Spannungszustand in einem gegebenen Punkt durch sechs Normal- und Schubspannungsgrößen $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})^T$ eindeutig charakterisieren.

Abschließend sollen noch einige wichtige Eigenschaften der Spannungskomponenten unter Transformation des Koordinatensystems angegeben werden. Betrachtet man den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem x, y, z zu einem anderen kartesischen Koordinatensystem x', y', z' , so lassen sich die neuen Spannungskomponenten durch die Ausgangsspannungen wie folgt darstellen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \alpha_1^2 + \sigma_y \beta_1^2 + \sigma_z \gamma_1^2 + 2\tau_{zy} \beta_1 \gamma_1 + 2\tau_{xz} \gamma_1 \alpha_1 + 2\tau_{yx} \alpha_1 \beta_1, \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x \alpha_2^2 + \sigma_y \beta_2^2 + \sigma_z \gamma_2^2 + 2\tau_{zy} \beta_2 \gamma_2 + 2\tau_{xz} \gamma_2 \alpha_2 + 2\tau_{yx} \alpha_2 \beta_2, \\ \sigma_{z'} &= \sigma_x \alpha_3^2 + \sigma_y \beta_3^2 + \sigma_z \gamma_3^2 + 2\tau_{zy} \beta_3 \gamma_3 + 2\tau_{xz} \gamma_3 \alpha_3 + 2\tau_{yx} \alpha_3 \beta_3, \\ \tau_{z'y'} &= \sigma_x \alpha_2 \alpha_3 + \sigma_y \beta_2 \beta_3 + \sigma_z \gamma_2 \gamma_3 + \tau_{zy} (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) \\ &\quad + \tau_{xz} (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) + \tau_{yx} (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3), \\ \tau_{x'z'} &= \sigma_x \alpha_3 \alpha_1 + \sigma_y \beta_3 \beta_1 + \sigma_z \gamma_3 \gamma_1 + \tau_{zy} (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) \\ &\quad + \tau_{xz} (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) + \tau_{yx} (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1), \\ \tau_{y'x'} &= \sigma_x \alpha_1 \alpha_2 + \sigma_y \beta_1 \beta_2 + \sigma_z \gamma_1 \gamma_2 + \tau_{zy} (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \\ &\quad + \tau_{xz} (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) + \tau_{yx} (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Dabei bezeichnen

$$\alpha_1 = \cos(x', x), \quad \beta_1 = \cos(x', y), \quad \gamma_1 = \cos(x', z),$$

$$\alpha_2 = \cos(y', x), \quad \beta_2 = \cos(y', y), \quad \gamma_2 = \cos(y', z),$$

$$\alpha_3 = \cos(z', x), \quad \beta_3 = \cos(z', y), \quad \gamma_3 = \cos(z', z)$$

die Richtungskosinus der neuen Koordinatenachsen x', y', z' bezüglich der Achsen des Ausgangssystems x, y, z . Mit

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^3 \beta_i^2 = \sum_{i=1}^3 \gamma_i^2 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^3 \beta_i \gamma_i = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \alpha_i = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i = 0$$

erhält man durch Addition der ersten drei Gleichungen in (1.4) die wichtige Beziehung

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (1.5)$$

Die Summe der Normalspannungskomponenten, die auf drei zueinander senkrechten Schnittflächen wirken, sind daher unabhängig von der Orientierung dieses Flächentripels und demzufolge invariant gegenüber einer kartesischen Koordinatentransformation. Berechnet man ferner die Normalspannungskomponente

$$\sigma_n = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{zy} \beta \gamma + 2\tau_{xz} \gamma \alpha + 2\tau_{yx} \alpha \beta$$

des zum Flächenelement mit der Normalen n gehörenden Spannungsvektors $\vec{\sigma}^n$, wobei α, β, γ die Richtungskosinus zwischen der Normalen n und den Achsen bezeichnet, so lässt sich diese als quadratische Form

$$2Q(\xi, \eta, \zeta) = \sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_{zy} \eta \zeta + 2\tau_{xz} \zeta \xi + 2\tau_{yx} \xi \eta$$

der Veränderlichen ξ, η, ζ interpretieren. Der Zusammenhang zwischen σ_n und der quadratischen Form ist dann durch

$$\sigma_n |\mathbf{P}|^2 = 2Q(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.6)$$

gegeben, wobei $\mathbf{P} = (\xi, \eta, \zeta)^T$ einen Vektor bezeichnet, der in Richtung der positiven Normalen n zeigt. Aus der Invarianz der linken Seite von Gleichung (1.6) lässt sich somit auch die Invarianz der quadratischen Form ableiten. Hieraus folgt schließlich, dass die Spannungskomponenten $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}$ einem symmetrischen Tensor zweiter Stufe, dem *Spannungstensor*, zugeordnet werden können.

1.1.2 Deformationen und Verschiebungen

Nach [Muskhelishvili 1971] versteht man unter der *Deformation* eines Kontinuums die relative Verschiebung der Punkte eines Körpers zueinander. Unter den Voraussetzungen, dass die Verformungen des Körpers stetig sind und es sich ferner im Verhältnis zu den Körperabmessungen um betragsmäßig sehr kleine Verschiebungen handelt, lassen sich die Deformationen eines Kontinuums als unendlich kleine affine Transformation beschreiben. Diese Transformationen werden im Speziellen dadurch charakterisiert, dass sich die transformierten Koordinaten als lineare Funktionen der Ausgangskoordinaten beschreiben lassen und weiterhin Eigenschaften besitzen, die aus den Bedingungen für die Anwendbarkeit einer unendlich kleinen

affinen Transformation resultieren. Vor dem Hintergrund der Mechanik von Kontinuumsmodellen ist es dabei von großem Interesse, die durch eine unendlich kleine Transformation beschriebene Formänderung eines Körpers hinsichtlich einer reinen Deformation und einer starren Verschiebung des Körpers zu zerlegen. Es seien nun $\mathbf{P} = (\xi, \eta, \zeta)^T$ ein Vektor, welcher ein unendlich kleines Volumenelement aufspannt und $\delta\mathbf{P} = (\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)^T$ der durch die Transformation hervorgerufene Zuwachs des Vektors \mathbf{P} . Außerdem benötigen wir die Verschiebungen in Richtung der globalen Koordinatenachsen, welche gewöhnlich als Verschiebungskomponenten u, v, w bezeichnet werden. Diese ordnen jedem Punkt des Körpers einen Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ zu und sind demzufolge als Funktionen der Koordinaten

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

definiert. Eine Auswertung der Formänderung am Volumenelement liefert für eine allgemeine Deformation die unendlich kleine affine Transformation

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \varepsilon_x \xi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \eta + \frac{1}{2}\gamma_{xz} \zeta + q \zeta - r \eta, \\ \delta\eta &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} \xi + \varepsilon_y \eta + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \zeta + r \xi - p \zeta, \\ \delta\zeta &= \underbrace{\frac{1}{2}\gamma_{xz} \xi + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \eta + \varepsilon_z \zeta}_{\textcircled{1}} + \underbrace{p \eta - q \xi}_{\textcircled{2}}, \end{aligned}$$

welche sich für die Komponenten $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ jeweils in den Anteil einer reinen homogenen Deformation $\textcircled{1}$ und in den Anteil einer starren Verschiebung $\textcircled{2}$ zerlegen lässt. Die Elemente $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})^T$ bezeichnen dabei *Normal-* bzw. *Schubverzerrungskomponenten*, die mit den Verschiebungskomponenten über die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

verknüpft sind. Die Komponenten

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

beschreiben unendlich kleine Drehwinkel um die Koordinatenachsen und repräsentieren die translativen Verschiebungen des Körpers. Es wird vorausgesetzt, dass die

Verschiebungen u, v, w eindeutige und stetige Funktionen sind sowie stetige Ableitungen bis zur III. Ordnung besitzen. Für die Verzerrungskomponenten folgt daraus, dass diese, neben der Eindeutigkeit und Stetigkeit, auch stetige Ableitungen bis zur II. Ordnung haben.

Wie aus den Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (1.7) hervorgeht, sind bei Vorgabe der Verschiebungen die Verzerrungen eindeutig bestimmt. In der Umkehrung ist dies jedoch nicht der Fall, wodurch bei der Bestimmung der Verschiebungen anhand vorgegebener Verzerrungen zusätzliche Bedingungen erfüllt sein müssen. Mathematisch formuliert, sind dies die so genannten *Verträglichkeitsbedingungen von Saint-Venant*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

welche die Kompatibilität zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen gewährleisten.

Abschließend sei noch bemerkt, dass analog zu den Spannungen auch die Verzerrungskomponenten $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{xz}\}$ einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe bilden, woraus die Invarianzeigenschaft der *Volumendehnung*

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.9)$$

gegenüber einer Transformation rechtwinkliger Koordinaten resultiert.

1.1.3 Konstitutive Beziehungen

Anhand physikalisch-geometrischer Gesetzmäßigkeiten wurden in den vorangegangenen Abschnitten differentielle Beziehungen für den Spannungs- und Verformungszustand eines beliebigen dreidimensionalen Kontinuums hergeleitet. Die konstitutiven Beziehungen stellen nun den Zusammenhang zwischen dem Spannungszustand des Körpers und den daraus resultierenden Verformungen dar. Im Rahmen dieser Arbeit beschränken sich die Ausführungen auf einen linear elastischen, homogenen und isotropen Körper. Im Speziellen bedeutet dies, dass die Anwendbarkeit des *verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes* vorausgesetzt wird und zudem die elastischen Eigenschaften des Körpers weder von der Orientierung der Koordinatenachsen relativ

zum Körper noch von der Lage des betrachteten Punktes im Körper abhängen. Daraus folgt ferner, dass bei Isotropie die Verzerrungshauptachsen in jedem Punkt des Körpers mit den Spannungshauptachsen zusammenfallen. Aus der Einschränkung des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes auf den Fall des isotropen, homogenen Körpers erhält man die bekannten Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right], \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right], \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right], \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Hierbei bezeichnen $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ die bereits eingeführte Volumendehnung und E , ν und G die elastischen Konstanten: Elastizitätsmodul, Querdehnzahl und Schubmodul, welche ferner durch $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ in Beziehung gesetzt werden. Die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen für einen isotropen, homogenen Körper werden somit durch ein System von sechs algebraischen Gleichungen beschrieben, welche sich in umgekehrter Weise ebenso eindeutig nach den Verzerrungskomponenten auflösen lassen.

1.1.4 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass sich der physikalische Zustand eines dreidimensionalen Kontinuums durch ein vollständiges System von partiellen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschreiben lässt. Unter einem vollständigen System von Gleichungen der Statik des elastischen Körpers versteht man hierbei ein System von Gleichungen, welches das elastische Gleichgewicht des Körpers vollständig bestimmt³. Kompakt formuliert, setzt sich dieses aus den elastostatischen Grundgleichungen: Gleichgewichtsbedingungen $-\mathbf{p} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma}$ (1.3), Kinematische Gleichungen $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$ (1.7) und Konstitutive Gleichungen $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$ (1.10) sowie aus den Gleichungen der Spannungskomponenten $\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}$ (1.2) des auf das Flächenelement mit der Normalen n wirkenden Spannungsvektors zusammen. Hier-

³Nachweis, q.v. [Muskhelishvili 1971]

bei bezeichnen

$$\mathbf{D}_e = (\mathbf{D}_k)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

die zueinander adjungierten Differentialoperatoren für Gleichgewicht und Kinematik und

$$\mathbf{E} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die Materialmatrix für einen linear elastischen, isotropen, homogenen Körper. Substituiert man nun die Verzerrungskomponenten in (1.10) durch die kinematischen Beziehungen (1.7), so lassen sich die Gleichungen (1.3), (1.7), (1.10) auf ein System von neun gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \\ \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

reduzieren, welche nur noch von den Verschiebungen \mathbf{u} und den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ abhängen. Dabei wurden die Materialparameter mit Hilfe der *Laméschen Konstanten*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

zusammengefasst und die Volumendehnung in der Form $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ verwendet. Das System (1.11) lässt sich nun eindeutig entweder nach der primären Variablen \mathbf{u} auflösen, was auf drei systembeschreibende Differentialgleichungen II. Ordnung führt, oder nach den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, wodurch man in diesem Fall neun Differentialgleichungen II. Ordnung zur vollständigen Beschreibung erhält. Im Rahmen dieser Arbeit soll jedoch nur der erste Fall, die Beschreibung der Grundgleichungen durch die Verschiebungskomponenten, betrachtet werden, da dieser eine wichtige Grundlage für die funktionentheoretischen Zugänge darstellt. Dazu werden die Spannungs-Verschiebungsrelationen aus System (1.11) in die Gleichgewichtsgleichungen eingesetzt, wodurch sich die bekannte *Lamé-Naviersche Differentialgleichung*⁴ in vektorieller Formulierung

$$-\mathbf{p} = \mathbf{D}_e \mathbf{E} \mathbf{D}_k \mathbf{u} \quad (1.12)$$

ergibt. Das System (1.11) lässt sich demnach äquivalent durch eine inhomogene, elliptische Differentialgleichung II. Ordnung in der primären Variablen \mathbf{u} beschreiben. Im Folgenden benötigt man außerdem die komponentenweise Darstellung der elastischen Grundgleichung (1.12), gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + X &= 0, \\ \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + Y &= 0, \\ \mu \Delta w + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

wobei bekanntlich $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ die Volumendehnung und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ den räumlichen Laplace-Operator bezeichnen.

1.1.5 Grundgleichungen der ebenen Elastizitätstheorie

Eine große Klasse von praktischen Problemstellungen der linearen Elastizitätstheorie lässt sich bereits durch zwei Sonderfälle der ebenen Elastizitätstheorie abbilden. Auf der Grundlage eines zweidimensionalen Kontinuumsmodells betrachtet man dabei den elastischen Körper in Bezug auf seine Rand- und Lagerungsbedingungen entweder im *ebenen Verzerrungszustand* oder im *ebenen Spannungszustand*. Im Bauwesen beispielsweise lassen sich mit diesen Idealisierungen hinreichend genaue Be-

⁴im Folgenden kurz als Lamé-Gleichung bezeichnet

rechnungsmodelle für langgestreckte Dammbauwerke (ebener Verzerrungszustand) oder für Scheibenträgerwerke (ebener Spannungszustand) erhalten.

Der ebene Verzerrungszustand basiert auf den Annahmen, dass die Verzerrungen bezüglich der Deformationsebene x, y eben bleiben, was bedeutet, dass die Verschiebungskomponente w in Richtung der z -Koordinate zu Null gesetzt wird und daher die Verschiebungskomponenten u, v nunmehr als Funktionen der Variablen x, y betrachtet werden. Folglich sind sowohl die Spannungskomponenten als auch die Volumenkräfte Funktionen von x, y und die zur Deformationsebene senkrechte Volumenkraft Z verschwindet. Wichtig ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen, dass zwar nach Voraussetzung die Verzerrungen eben bleiben und alle auftretenden Größen nur noch Funktionen in den Variablen x, y darstellen, jedoch die Normalspannungen in z -Richtung nicht verschwinden. Aus mechanischer Sicht bewirken die Normalspannungen in z -Richtung, dass die Verzerrungen in der Ebene bleiben. Demzufolge können diese auch nicht beliebig vorgegeben werden, sondern müssen vielmehr aus der Beziehung $\sigma_z = \lambda e$ berechnet werden.

Im Gegensatz dazu basiert der ebene Spannungszustand auf der Modellvorstellung einer dünnen, elastischen Scheibe. Grundannahmen sind hierbei, dass der elastische Körper durch seine Mittelfläche repräsentiert werden kann und dass dieser ausschließlich durch Kräfte in dieser Ebene belastet wird. Im ebenen Spannungszustand verschwinden dadurch die Normalspannung σ_z im ganzen Körper sowie die Schubspannungen τ_{xz}, τ_{yz} auf den zur Mittelfläche parallelen Grundflächen. Alle weiteren beschreibenden Größen sind dabei analog zum ebenen Verzerrungszustand Funktionen in den Variablen x, y , jedoch nun als über die Scheibendicke gemittelte Werte definiert.

Vergleicht man beide Gleichgewichtszustände der ebenen Elastizitätstheorie, so lässt sich das räumliche, vollständige System (1.11) im ebenen Fall wie folgt reduzieren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \\ \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

mit $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$. Hierbei ist zu beachten, dass im Fall des ebenen Spannungszustandes die Verschiebungs- und Spannungskomponenten sowie die Volumenkräfte durch ihre Mittelwerte über die Scheibendicke und die Materialkonstante λ durch $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ zu ersetzen sind. Dies erlaubt eine formale Betrachtung der ebenen Theorie, wodurch

im Folgenden auf eine Unterscheidung der ebenen Gleichgewichtszustände verzichtet werden kann. Für die Grundgleichungen der ebenen Elastizitätstheorie in den Verschiebungen erhält man analog zum räumlichen Fall

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + X &= 0, \\ \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

wobei $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

1.2 Randwertprobleme der Elastostatik

In diesem Abschnitt soll kurz auf die in der linearen Elastizitätstheorie vorwiegend auftretenden Randwertprobleme eingegangen werden, wobei im Wesentlichen den Ausführungen in [Muskhelishvili 1971] gefolgt wird. Gegenstand der Betrachtungen sei das vollständige System von Gleichungen (1.11) der Statik des elastischen Körpers. Es ist nun die Frage zu klären, inwieweit durch (1.11) der elastische Gleichgewichtszustand des Körpers vollständig bestimmt ist, wenn die auf den Körper wirkenden äußeren Belastungen⁵ und inneren Volumenkräfte bekannt sind. Dabei gilt der elastische Gleichgewichtszustand als bestimmt, wenn die Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ oder die Verschiebungen u, v, w in jedem Punkt des Körpers bekannt sind. Daraus resultiert das folgende Randwertproblem.

Definition 1.1 (I. Randwertproblem). Gesucht ist der elastische Gleichgewichtszustand des Körpers, wenn die an der Oberfläche des Körpers angreifenden äußeren Kräfte vorgegeben sowie die Volumenkräfte bekannt sind.

In Bezug auf die Gleichungen (1.11) ist das I. Randwertproblem äquivalent zu der Problemstellung, die Verschiebungen \mathbf{u} und die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ so zu bestimmen, dass diese im ursprünglich eingenommenen Gebiet V des Körpers die Gleichgewichtsbedingungen (1.3) und außerdem auf dem Rand S des Körpers die nach (1.2) gegebenen Spannungsrandbedingungen

$$\overset{n}{\sigma}_x = f_1, \quad \overset{n}{\sigma}_y = f_2, \quad \overset{n}{\sigma}_z = f_3$$

⁵äußere Volumenkräfte und Flächenlasten

befriedigen. Die Funktionen f_i , $i = 1, 2, 3$ bezeichnen dabei die Komponenten des auf die Randfläche wirkenden Spannungsvektors. Da sich das Randwertproblem auf Normalableitungen der Verschiebungen bezieht, spricht man in diesem Zusammenhang auch von einer *Randwertaufgabe mit Neumann-Randbedingung* oder kurz einem *Neumannproblem*.

Neben dieser Art von Randwertaufgaben sind in der Elastostatik auch solche Probleme von Interesse, bei welchen die Verschiebungen auf dem Rand vorgegeben werden.

Definition 1.2 (II. Randwertproblem). Gesucht ist der elastische Gleichgewichtszustand des Körpers, wenn die Verschiebungen der Randpunkte des Körpers vorgegeben sowie die Volumenkräfte bekannt sind.

Dies entspricht dem mechanischen Modell, dass jedem Punkt der Oberfläche S des Körpers eine zur dort angreifenden Belastung äquivalente Verschiebung zugeordnet und der elastische Gleichgewichtszustand unter dieser Verformung gesucht wird. Daher führt das II. Randwertproblem auf die Ermittlung einer Lösung, die auf dem Rand S den Bedingungen

$$u = g_1, \quad v = g_2, \quad w = g_3$$

genügt, wobei g_i , $i = 1, 2, 3$ die auf der Randfläche vorgegebenen Verschiebungsfunktionen in Richtung der jeweiligen Koordinatenachsen x, y, z bezeichnen. Im Falle des II. Randwertproblems werden also Funktionen der primären Größen u, v, w auf dem Rand vorgegeben, wodurch man daher auch von einer *Randwertaufgabe mit Dirichlet-Randbedingung* oder kurz einem *Dirichletproblem* spricht.

Abschließend sei bemerkt, dass sich die meisten Anwendungsfälle in der linearen Elastizitätstheorie auf die oben genannten Randwertprobleme I. und II. Art oder auf das *gemischte Randwertproblem*, bei dem sowohl Verschiebungen als auch äußere Spannungen auf Teilen des Randes vorgegeben werden, zurückführen lassen. Selbstverständlich existieren in der Praxis neben diesen grundlegenden Formulierungen auch zahlreiche andere Randwertprobleme, auf die im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht näher eingegangen wird.

1.3 Zusammenfassung

Ziel dieses einführenden Kapitels war es, die für diese Arbeit notwendigen Grundlagen und Bezeichnungen der linearen mathematischen Elastizitätstheorie einzuführen und die systembeschreibenden Gleichungen für ein zwei- und dreidimensionales Kontinuumsmodell anzugeben. Insbesondere sollte dabei die Invarianzeigenschaft des Spannungstensors und die Zerlegung einer allgemeinen Deformation in einen homogenen Deformationsanteil und in den Anteil einer reinen Starrkörperverschiebung herausgestellt werden, da sich diese Eigenschaften in expliziter Form auch in den funktionentheoretischen Ansätzen wiederfinden lassen. Selbstverständlich gehören die Betrachtungen der Elastostatik eines linear elastischen, homogenen, isotropen Körpers zum heutigen Stand der Technik und könnten daher trivialerweise vorausgesetzt werden. Aus Gründen der Einheitlichkeit und Vergleichbarkeit der ebenen und räumlichen funktionentheoretischen Verfahren wurde hier jedoch eine kurze Einführung dieser bekannten Grundlagen gegeben, die sich aber bewusst auf das Wesentliche beschränkt.

Kapitel 2

Funktionentheoretische Methoden in der Ebene und im Raum

*„Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich
erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.“*

Carl Friedrich Gauß

Zur Lösung von ebenen Problemen der linearen Elastizitätstheorie existieren eine Vielzahl verschiedener Methoden und Techniken. Ein theoretisch sehr bedeutendes Verfahren ist in diesem Zusammenhang die *Methode der komplexen Spannungsfunktionen*, welche hauptsächlich mit den Arbeiten von G.W. KOLOSOV [KolosoV 1909; 1914] und seinem Schüler N.I. MUSKHELISHVILI [Muskhelishvili 1971] in Verbindung gebracht wird. Im Vergleich zu herkömmlichen Methoden zeichnet sich der komplexe Ansatz insbesondere dadurch aus, dass sich zum einen für eine bedeutend große Klasse von Randwertproblemen der Elastostatik analytische Lösungsdarstellungen mit Hilfe von komplexen Potenz- oder Laurentreihen gewinnen lassen, welche zudem die systembeschreibende Differentialgleichung in jedem Punkt des betrachteten Gebietes exakt erfüllen. Jeder Approximationsschritt repräsentiert daher einen mechanisch möglichen Zustand des Strukturmodells, was im Vergleich zu einem numerischen Verfahren die besondere Qualität des Ansatzes verdeutlicht. Zum anderen ist durch die Verwendung der Methode der komplexen Spannungsfunktionen eine sehr gute Basis für weiterführende theoretische Betrachtungen im erhaltenen Lösungsraum gegeben, da nun auch überaus effiziente funktionentheoretische Werkzeuge, wie beispielsweise *konforme Abbildungstechniken* oder die *Integralformel von Cauchy*, für die Auswertung des Randwertproblems eingesetzt werden können.

Ausgangspunkt bei der Konstruktion der so genannten *Kolosov-Muskhelishvili Formeln* ist im ebenen Fall die *Airysche Spannungsfunktion*. Die Lösung der elastischen Grundgleichungen für einen homogenen, isotropen Körper im ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand (1.14) lässt sich dabei äquivalent auf die Lösung einer Bipotentialgleichung zurückführen. Eine umfangreiche Zusammenfassung der historischen Entwicklung der zweidimensionalen Bipotentialgleichung mit zahlreichen Querverweisen zur Airyschen Spannungsfunktion und zur linearen Elastizitätstheorie findet sich im Artikel von V.V. MELESHKO [Meleshko 2003]. In der Folge konnte dann, zuerst durch E. GOURSAT [Goursat 1898] angegeben, ein für den komplexen Zugang überaus wichtiges Resultat bewiesen werden, nachdem sich jede biharmonische Funktion mit Hilfe von zwei holomorphen Funktionen ausdrücken lässt. Dieses Resultat verbindet die lineare Elastizitätstheorie des euklidischen Vektorraumes \mathbb{R}^2 mit der komplexen Funktionentheorie in \mathbb{C} , wodurch sich die Spannungen und Deformationen über die bekannten *Kolosov-Muskhelishvili Formeln* (q.v. [Muskhelishvili 1971]) ausdrücken lassen. Auf der Grundlage dieser Gleichungen können für eine Vielzahl praktisch relevanter Anwendungsfälle sehr gute analytische Lösungsdarstellungen erhalten werden.

Ein wichtiger Anwendungsbereich ist in diesem Zusammenhang die ebene lineare Bruchmechanik, der die Methode der komplexen Spannungsfunktion als theoretische Ausgangsbasis dient. Hier konstruiert man analytische Lösungen für das Rissspitzennahfeld durch komplexe Orthogonalreihenentwicklungen der holomorphen Funktionen Φ und Ψ , welche die Ordnung der Singularität exakt wiedergeben [Muskhelishvili 1971, Westergaard 1939]. Aus diesen zumeist in expliziter Form erhaltenen Lösungsdarstellungen lassen sich schließlich die für die praktische Anwendung sehr wichtigen bruchmechanischen Kenngrößen, wie beispielsweise Spannungsintensitätsfaktoren oder die Energiefreisetzungsrate, ableiten. Daher stellt sich zwangsläufig die Frage nach einer Verallgemeinerung dieses sehr effizienten Verfahrens auf den räumlichen Fall. Erste Versuche hierzu wurden durch G.N. POLOZHII [Polozhij 1973] unternommen, welcher unter Verwendung p -analytischer Funktionensysteme räumliche Spannungs- und Verschiebungsdarstellungen zunächst für den axial-symmetrischen Fall konstruierte. Diese Ansätze wurden später durch O.G. GOMAN [Goman 1984] auch auf den allgemeinen Spannungszustand übertragen, wonach man für jeden Term der Fourierreihe räumliche Darstellungsformeln erhielt und diese als Verallgemeinerung der ebenen Ansätze interpretierte. Ein anderer Zugang wurde durch

A.A. PIMENOV und V.I. PUSHKAREV [Pimenov & Pushkarev 1991] verfolgt, welche unter Verwendung reeller Quaternionen eine Randintegraldarstellung für das 1. Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie angeben konnten. Vergleicht man allerdings die Methode der komplexen Spannungsfunktionen mit herkömmlichen Verfahren, so liegt der wesentliche Vorteil der Methode in der Verwendung holomorpher Funktionen und den daraus resultierenden funktionentheoretischen Werkzeugen. Vor diesem Hintergrund erscheinen die im Vorangegangenen eingeführten Ansätze als wenig praktikabel. Erste Versuche auch räumliche Verallgemeinerungen der komplex-holomorphen Funktionen zur Beschreibung zu verwenden, finden sich in [Tsalik 1995]. Eine systematische Übertragung der komplexen Methodik auf die dort erhaltenen räumlichen Darstellungsformeln wurde dabei jedoch nur ansatzweise untersucht.

Dieses Kapitel widmet sich daher den funktionentheoretischen Methoden der linearen Elastizitätstheorie in der Ebene und im Raum mit dem Ziel, die ebenen Kolosov-Muskhelishvili Formeln auf der Grundlage räumlich-holomorpher Funktionen auf den \mathbb{R}^3 zu übertragen. Dabei wird wie folgt vorgegangen: Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird zunächst die Methode der komplexen Spannungsfunktionen in ihren Grundzügen eingeführt. Ferner werden einige wichtige Eigenschaften zur Lösung ebener Randwertaufgaben betrachtet, welche insbesondere die komplexwertige Struktur des Lösungsansatzes nutzen. Bei der Verallgemeinerung auf den räumlichen Fall sollen dann vor allem die Analogien und Einschränkungen bezüglich der ebenen Theorie herausgearbeitet werden. Daher beschäftigt sich der dritte Abschnitt zunächst mit den Grundlagen der Algebra reeller Quaternionen. Schließlich werden im vierten Abschnitt die ebenen Kolosov-Muskhelishvili Formeln in systematischer Weise auf den räumlichen Fall verallgemeinert, indem die Klasse der \mathbb{H} -holomorphen Funktionen, welche als räumliches Analogon der holomorphen Funktionen verstanden werden, konsequent bei der Konstruktion verwendet wird.

2.1 Methode der komplexen Spannungsfunktionen

Die theoretische Grundlage für die Methode der komplexen Spannungsfunktionen bildet die komplexe Darstellung der allgemeinen Lösung für die Grundgleichungen der ebenen Elastizitätstheorie. Um die Analogie zu den in dieser Arbeit entwickelten räumlichen Darstellungsformeln zu verdeutlichen, sollen in diesem Abschnitt die

komplexen Ansätze kurz eingeführt werden. Für ein vertieftes Studium sei auf das Standardwerk [Muskhelishvili 1971] oder die Monographie [Lu 1995] verwiesen.

Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist das ebene, vollständige System (1.14) bei verschwindenden Volumenkräften

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Der klassische Ansatz beruht nun auf der Überlegung, eine allgemeine Funktion $U(x, y)$ einzuführen, welche zunächst die Gleichgewichtsbedingungen in (2.1) erfüllt. Die Spannungskomponenten in Abhängigkeit von U ergeben sich dann zu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (2.2)$$

Diese Beziehungen wurden erstmals im Jahre 1862 durch G.B. AIRY angegeben, wodurch U auch als *Airysche Spannungsfunktion* bezeichnet wird. Durch Einsetzen der verbleibenden Gleichungen aus (2.1) in die Gleichgewichtsbedingungen erhält man nach einfacher Rechnung (cf. [Lu 1995]) die Beziehung

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Diese Gleichung entspricht den Saint-Vernantschen Verträglichkeitsbedingungen (1.8) für die Ebene und wird daher auch als *Kompatibilitätsgleichung* bezeichnet. Mit (2.2) folgt sofort, dass $\sigma_x + \sigma_y = \Delta U$ und damit

$$\Delta \Delta U = 0.$$

Auf diese bedeutende Charakterisierung der Airyschen Spannungsfunktion wurde erstmalig von J.C. MAXWELL [Maxwell 1868] hingewiesen, wonach sich also das vollständige System (2.1) von fünf gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung äquivalent auf eine Bipotentialgleichung und damit auf eine homogene partielle Differentialgleichung IV. Ordnung in der unbekannten Funktion U zurückführen lässt.

Setzt man nun U als bekannt voraus, so ergeben sich die Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ direkt aus den Beziehungen (2.2). Die Verschiebungskomponenten u, v in Abhängigkeit der Airy-Funktion erhält man durch Umformung und Integration (q.v. [Muskhelishvili 1971]) der Spannungs-Verschiebungsbeziehungen in (2.1), was letztendlich auf die Beziehungen

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p, \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q \quad (2.3)$$

führt. Hierbei bezeichnen p, q zwei harmonische Funktionen, welche ferner als Komponenten einer holomorphen Funktion $\varphi(z) = p + \mathbf{i}q$ definiert sind und durch die Beziehungen $P = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y}$ und $\Delta U = P$ mit der Spannungsfunktion U in Beziehung gesetzt werden. Den theoretischen Hintergrund hierzu liefert der folgende Darstellungssatz.

Theorem 2.1 (Darstellungssatz von Goursat in \mathbb{C}). *Für jede Lösung $U \in C^4(\Omega; \mathbb{R})$ der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ existieren zwei holomorphe Funktionen φ und ψ , so dass*

$$U(z) = \frac{1}{2} \left(\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \psi(z) + \overline{\psi(z)} \right) = \mathbf{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)],$$

wobei $z = x + \mathbf{i}y$.

Beweis. Der Beweis soll im Folgenden nur kurz skizziert werden. Eine ausführliche Herleitung des Satzes mit Querverweisen zum ursprünglichen Resultat von E. GOURSAT [Goursat 1898] findet sich in [Muskhelishvili 1971].

Nach Voraussetzung ist durch $P := \Delta U$ eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω harmonische Funktion definiert. Dann gibt es in Ω eine zu P konjugiert harmonische Funktion Q , welche bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Durch $f(z) := P + \mathbf{i}Q$ ist damit eine in Ω holomorphe Funktion erklärt. Mit

$$\varphi(z) := p + \mathbf{i}q = \frac{1}{4} \int f(z) dz$$

zeigt man leicht, dass $\Delta[U - px - qy] = 0$. Damit ist durch $p_1 := U - px - qy$ eine in Ω harmonische Funktion definiert, für die sich ebenfalls eine konjugiert harmonische Funktion q_1 bestimmen lässt, so dass $\psi(z) := p_1 + \mathbf{i}q_1$ holomorph in Ω ist. Schließlich erhält man

$$U(z) = px + qy + p_1 = \frac{1}{2} \left(\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \psi(z) + \overline{\psi(z)} \right)$$

und somit die Behauptung des Theorems. \square

Mit Hilfe des Darstellungssatzes lassen sich nun auch die Spannungs- (2.2) und die Verschiebungskomponenten (2.3) in eine \mathbb{C} -wertige Darstellung

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 \left(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right) = 4 \mathbf{Re}[\varphi'(z)], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2\mathbf{i}\tau_{xy} &= 2 \left(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) \right), \\ 2G(u + \mathbf{i}v) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

überführen, wobei $\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3 - 4\nu$. Diese Gleichungen wurden erstmals durch G.W KOLOSOV [Kolosov 1909] angegeben und später durch die Arbeiten von N.I. MUSKHELISHVILI theoretisch ausgebaut. Daher werden diese Gleichungen als *komplexe Spannungs- bzw. Verschiebungsfunktionen* oder allgemein als *Kolosov-Muskhelishvili Formeln* bezeichnet.

Der Spannungs- bzw. Verschiebungszustand des Körpers lässt sich demzufolge durch zwei holomorphe Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ beschreiben, welche durch die Gleichungen (2.4) jedoch nicht eindeutig festgelegt werden. Bei vorgegebenem Spannungszustand ist

- (I) die Funktion $\varphi(z)$ bis auf den Term $Ciz + \gamma$ und
- (II) die Funktion $\psi(z)$ bis auf den Term γ'

bestimmt. Hierbei bezeichnet C eine reelle Konstante, und γ, γ' sind komplexe Konstanten. Demnach lässt eine Addition der zusätzlichen Terme aus (I) bzw. (II) den Spannungszustand des Körpers unverändert. Wie sich zeigen lässt, korrespondieren zu diesen Anteilen gerade die Starrkörperverschiebungen $u_0 + iv_0$ in der Ebene, die sich in komplexer Form durch

$$u_0 + iv_0 = \frac{(\varkappa + 1)C}{2G} iz + \frac{\varkappa\gamma - \overline{\gamma'}}{2G}$$

angeben lassen. Das bedeutet also, dass eine Addition der beliebigen Terme aus (I) und (II) nur dann keine Verschiebungen des Gesamtkörpers hervorruft, wenn $C = 0$ und $\varkappa\gamma - \overline{\gamma'} = 0$ gilt. Diese bezüglich der Spannungs- bzw. Verschiebungsansätze frei wählbaren Konstanten können je nach Zweckmäßigkeit vorgegeben werden. Auf diese Fragestellung wird jedoch im räumlichen Fall näher eingegangen und einige Möglichkeiten zur Festlegung der freien Konstanten angegeben.

Prinzipiell dienen die Kolosov-Muskhelishvili Formeln (2.4) dann als methodische Grundlage um Randwertprobleme der ebenen Elastostatik durch Potenz- oder Laurentreihenentwicklungen der holomorphen Funktionen näherungsweise zu lösen und weiterführende funktionentheoretische Fragestellungen anhand der Lösung zu untersuchen. Dies würde jedoch an dieser Stelle zu weit führen, da sich in der räumlichen Funktionentheorie bereits die Konstruktion geeigneter Reihenentwicklungen als sehr schwierig und aufwendig erweist. Daher wird die theoretische Betrachtung der Methode der komplexen Spannungsfunktionen an dieser Stelle nicht weiter vertieft und sich nun gezielt mit der räumlichen Verallgemeinerung des komplexen Ansatzes beschäftigt.

2.2 Grundlagen der räumlichen Funktionentheorie

Als theoretische Grundlage für die Herleitung eines räumlichen Analogons der ebenen Kolosov-Muskhelishvili Formeln, werden zunächst verallgemeinerte funktionentheoretische Ansätze benötigt, die neben der rein formellen Darstellung der Mechanik des räumlichen Kontinuums vor allem die überaus wichtigen theoretischen Werkzeuge, wie beispielsweise verallgemeinerte Orthogonalreihenentwicklungen oder die Integralformel von Cauchy, bereitstellen. Eine für diese Belange geeignete algebraische Struktur ist durch den Schiefkörper der reellen Quaternionen gegeben. Die Entdeckungsgeschichte der Quaternionen ist maßgeblich mit dem Namen des irischen Mathematikers SR. W.R. HAMILTON verknüpft, welcher im Jahre 1843 die Quaternionen

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

als geordnete Quadrupel $q = (a, b, c, d)$ reeller Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ einführte. Dabei bezeichnen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ die imaginären Einheiten der Quaternion, welche ferner den Multiplikationsregeln

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

unterworfen sind. In Analogie zum komplexen Zahlenkörper \mathbb{C} lassen sich demnach auf dem Schiefkörper reeller Quaternionen \mathbb{H} alle algebraischen Verknüpfungen bis auf die Kommutativität der multiplikativen Gruppe definieren.

Inspiriert durch die hamiltonsche Idee der Quaternionen als Verallgemeinerung der komplexen Zahlen auf den \mathbb{R}^4 und durch die von H.G. GRASSMANN richtungsweisende Arbeit *Die lineale Ausdehnungslehre*, legte W.K. CLIFFORD in den Jahren 1876-1878 die Grundlagen für eine universelle, geometrische Algebra im \mathbb{R}^n , welche heutzutage als *Clifford-Algebra* $\mathcal{Cl}_{p,q}$, $p \in \{0, \dots, n\}$, $q := n - p$ bezeichnet wird. Mit Hilfe der Clifford-Algebren lassen sich geometrische Aspekte in einfacher Weise auf höherdimensionale Funktionenräume abbilden, wodurch sie insbesondere für viele Bereiche der mathematischen und theoretischen Physik, wie beispielsweise der Differentialgeometrie oder der Quantenphysik, eine große praktische Bedeutung besitzen. Eine systematische Grundlage einer solchen verallgemeinerten Funktionentheorie wurde insbesondere in [Brackx et al. 1982] gelegt und deren praktische Effizienz bei der Anwendung auf die Lösung partieller Differentialgleichungen [Gürlebeck &

Sprößig 1989; 1997] oder auf Probleme der mathematischen Physik [Kravchenko & Shapiro 1996, Kravchenko 2003] aufgezeigt.

Da eine Betrachtung der kontinuumsmechanischen Ansätze vor dem Hintergrund einer universellen Clifford-Algebra $Cl_{p,q}$ im \mathbb{R}^n für $n > 3$ nur in wenigen Ausnahmefällen sinnvoll erscheint und ferner Missverständnisse infolge der verwendeten Notation vermieden werden sollen, wird sich im Rahmen dieser Arbeit ausdrücklich auf die Algebra reeller Quaternionen beschränkt. Im Folgenden werden daher zunächst einige grundlegende Begriffe und Notationen eingeführt und die in dieser Arbeit verwendeten \mathbb{H} -wertigen Funktionenräume angegeben.

2.2.1 Der Schiefkörper \mathbb{H} reeller Quaternionen

Der Schiefkörper reeller Quaternionen wird zunächst als Erweiterungskörper der reellen Zahlen definiert.

Definition 2.1. Die Menge $\mathbb{H} := \{\mathbf{a} : \mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3), a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 3\}$ sei die Menge der geordneten Quadrupel reeller Zahlen. Die Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 heißen *Koordinaten von \mathbf{a}* . Zwei Quadrupel $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ sind genau dann gleich, wenn die Koordinaten einzeln gleich sind: $a_k = b_k, k = 0, 1, 2, 3$. Die *Addition* wird dabei koordinatenweise definiert:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

ebenso die *Multiplikation mit einer reellen Zahl λ*

$$\lambda \mathbf{a} := (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Die *Multiplikation* wird als lineare Fortsetzung der Multiplikation der Basiselemente eingeführt, dabei wird die *Standardbasis des \mathbb{R}^4* , $\mathbf{e}_0 := (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_1 := (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 := (0, 0, 0, 1)$, benutzt: \mathbf{e}_0 soll das Einselement der Multiplikation sein, die anderen drei Basiselemente genügen den Multiplikationsregeln

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = -2\delta_{ij} \mathbf{e}_0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

wobei δ_{ij} das Kroneckersymbol bezeichnet.

Betrachtet man nun den \mathbb{R}^4 als reellen Vektorraum und identifiziert ferner den Vektor $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^4$ mit der *reellen Quaternion*

$$\mathbf{a} = a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{k=0}^3 a_k \mathbf{e}_k,$$

so lässt sich dieser strukturell in \mathbb{H} einbetten. Es sei darauf hingewiesen, dass in allen weiteren Ausführungen das Einselement der Multiplikation \mathbf{e}_0 nur dort explizit verwendet wird, wo es entweder zur Vereinfachung der Darstellung oder zur Vermeidung von Missverständnissen bei der Notation notwendig ist. In allen anderen Fällen wird darauf verzichtet.

Im Weiteren sollen nun einige Begriffe eingeführt werden, die sich allerdings nur geringfügig von der im Komplexen verwendeten Bezeichnungsweise unterscheiden. Gegeben sei eine Quaternion $\mathbf{a} = a_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$. Die reelle Zahl a_0 wird als *Skalarteil* $\mathbf{Sc}(\mathbf{a})$ und die vektorielle Komponente $\underline{\mathbf{a}} := a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ als *Vektorteil* $\mathbf{Vec}(\mathbf{a})$ der Quaternion $\mathbf{a} = a_0 + \underline{\mathbf{a}}$ bezeichnet. Analog dem komplexen Fall, erhält man durch $\bar{\mathbf{a}} = a_0 - \underline{\mathbf{a}}$ die zu \mathbf{a} konjugierte Quaternion, wodurch sich Skalar- und Vektorteil durch

$$\mathbf{Sc}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{Vec}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}}{2}$$

berechnen lassen. Weiterhin wird durch $|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}} = \sqrt{\sum_{k=0}^3 a_k^2}$ der *Betrag* einer Quaternion definiert. Demnach ist dieser äquivalent zur euklidischen Norm eines entsprechenden Vektors im \mathbb{R}^4 . Anhand der eingeführten Operationen lassen sich weitere Rechenregeln und Beziehungen ableiten, welche hier nur kurz zusammengefasst werden.

Lemma 2.1. *Für die Quaternionen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Beziehungen:*

- | | |
|---|--|
| (I) $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a} ^2,$ | (II) $\mathbf{a}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}}{ \mathbf{a} ^2}, \mathbf{a} \neq 0,$ |
| (III) $\overline{\lambda\mathbf{a}} = \lambda\bar{\mathbf{a}},$ | (IV) $\overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$ |
| (V) $\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}},$ | (VI) $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}},$ |
| (VII) $ \mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} ,$ | (VIII) $ \bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a} = \mathbf{a} ,$ |
| (IX) $(\mathbf{a}\mathbf{b})^{-1} = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1}, \mathbf{a}\mathbf{b} \neq 0,$ | (X) $ \mathbf{Sc}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{a} , \mathbf{Vec}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{a} ,$ |
| (XI) $ \mathbf{a} + \mathbf{b} \leq \mathbf{a} + \mathbf{b} ,$ | (XII) $ \mathbf{a} - \mathbf{b} \leq \mathbf{a} - \mathbf{b} .$ |

Wie bereits einführend erläutert, besteht eine wichtige Teilaufgabe dieser Arbeit darin, die ebenen Kolosov-Muskhelishvili Formeln auf den räumlichen Fall, also auf den \mathbb{R}^3 , zu übertragen. Daher wird außerdem die Aufspannung

$$\mathcal{A} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

in \mathbb{H} betrachtet. Jeder Vektor $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, $x, y, z \in \mathbb{R}$ des reellen Vektorraums \mathbb{R}^3 kann dann durch die Identifikation mit der *reduzierten Quaternion*

$$\mathbf{x} = x + y\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_2 \in \mathcal{A}$$

als Einbettung in der Teilmenge \mathcal{A} verstanden werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden das Symbol \mathbf{x} sowohl für die Darstellung eines Punktes im \mathbb{R}^3 als auch für die Bezeichnung der reduzierten Quaternion verwendet. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass zwar die Teilmenge \mathcal{A} einen reell-linearen Unterraum von \mathbb{H} aufspannt, jedoch bezüglich der Quaternionenmultiplikation nicht abgeschlossen ist und demzufolge keine Unter algebra von \mathbb{H} bildet. Des Weiteren sei erwähnt, dass die Bezeichnung der Koordinatenachsen mit x, y, z bereits an die gebräuchliche Bezeichnungsweise in der klassischen Elastizitätstheorie angepasst wurde, der in dieser Arbeit prinzipiell gefolgt wird.

2.2.2 Räume \mathbb{H} -wertiger Funktionen

In diesem Abschnitt werden neben der formalen Definition von \mathbb{H} -wertigen Funktionen einige Funktionenräume eingeführt, die für die in dieser Arbeit entwickelten Methoden und Nachweiskonzepte notwendig sind. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Klasse der *\mathbb{H} -holomorphen (monogenen) Funktionen*, welche Lösungen eines *verallgemeinerten Cauchy-Riemann Systems* sind und somit als räumliches Analogon zur Klasse der holomorphen Funktionen in \mathbb{C} betrachtet werden. In diesem Zusammenhang wird das Konzept der hyperkomplexen Ableitung erläutert und wichtige Differentialoperatoren auf der Grundlage des *verallgemeinerten Cauchy-Riemann Operators* definiert.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und stückweise glatt berandet. Als eine quaternionenwertige Funktion f bezeichnet man die Abbildung

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{H},$$

so dass

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^3 f^i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Die Koordinaten $f^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ sind dabei als reelle Funktionen in Ω definiert. In Analogie zur komplexen Funktionentheorie werden auch in der hyperkomplexen Theorie Funktionen als stetig, reell-differenzierbar oder -integrierbar bezeichnet, falls diese Eigenschaften auch auf alle Koordinaten f^i , $i = 0, 1, 2, 3$ der \mathbb{H} -wertigen Funktion f zutreffen. Infolge der reellen Differenzier- und Integrierbarkeit lassen sich Räume mehrdimensionaler Funktionen nun auch vor dem Hintergrund reeller Funktionenräume betrachten. Gegenstand der folgenden Betrachtungen sind stets Funktionen $f : G \rightarrow Y$, $G \subset X$, wobei

$$X \text{ gleich } \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{A}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad Y \text{ gleich } \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{A}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^n$$

sein kann, jeweils mit der üblichen euklidischen Metrik versehen.

Definition 2.2. Es sei wie gewöhnlich $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ der *Laplace-Operator* im \mathbb{R}^3 . Mit dem Multiindex $\mathbf{k} = (k_0, k_1, k_2)$, $|\mathbf{k}| = k_0 + k_1 + k_2$, $k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 0, 1, 2$ werde durch das Symbol

$$\nabla^{\mathbf{k}} := \frac{\partial^{k_0}}{\partial x^{k_0}} \frac{\partial^{k_1}}{\partial y^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x^{k_0} \partial y^{k_1} \partial z^{k_2}}$$

die partielle Ableitung zur Ordnung $|\mathbf{k}|$ erklärt. Bezüglich des Gebietes $G \subset X$ einer Funktion $f : G \rightarrow Y$ seien die folgenden Funktionenräume definiert:

- (I) $C(G; Y)$, Raum aller auf G stetigen Funktionen;
- (II) $C^m(G; Y)$, Raum aller auf G m -mal reell stetig differenzierbaren Funktionen, so dass $\nabla^{\alpha} f \in C(G; Y)$ für $|\alpha| \leq m$, wobei m eine nicht-negative ganze Zahl ist;
- (III) $C^\infty(G; Y)$, Raum aller Funktionen f auf G , welche alle Ableitungen ∇^{α} beliebig hoher Ordnung besitzen;
- (IV) $L^2(G; Y)$, Hilbert-Raum aller Funktionen f , für die $|f|$ quadratisch integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes dV auf G ist, i.e.

$$L^2(G; Y) = \left\{ f : \left(\int_G |f|^2 dV \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

und dem zugehörigen inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(G; Y)} := \int_G \overline{f(x)} g(x) dV;$$

- (v) $W^{m,2}(G; Y)$, Sobolev-Raum aller Äquivalenzklassen von Funktionen $f \in L^2(G; Y)$, deren Ableitungen $\nabla^\alpha f$ für $|\alpha| \leq m$ zu $L^2(G; Y)$ gehören, wobei m eine nicht-negative ganze Zahl ist. Für $m = 0$ ist bekanntlich $W^{0,2}(G; Y) = L^2(G; Y)$;

Es sei darauf hingewiesen, dass bei mehrdimensionalem Y die an f gestellten Bedingungen bezüglich der Differenzierbarkeit durch die Komponenten f^i erfüllt sein müssen.

Der in Paragraph (IV) der Definition 2.2 eingeführte allgemeine Hilbert-Raum soll im Folgenden für den Sonderfall eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ betrachtet werden. Durch $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{R})$ wird nun einerseits der \mathbb{R} -lineare Hilbert-Raum quadratisch integrierbarer \mathbb{H} -wertiger Funktionen mit dem zugehörigen \mathbb{R} -wertigen inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle_{(\Omega; \mathbb{R})} = \text{Sc} \int_{\Omega} \bar{f} g dV \quad (2.5)$$

und andererseits durch $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H})$ der \mathbb{H} -lineare Hilbert-Raum quadratisch integrierbarer \mathbb{H} -wertiger Funktionen mit dem zugehörigen \mathbb{H} -wertigen inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle_{(\Omega; \mathbb{H})} = \int_{\Omega} \bar{f} g dV \quad (2.6)$$

eingeführt, wobei dV das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^3 bezeichnet. Hintergrund der unterschiedlichen Betrachtungsweise ist, dass die durch beide inneren Produkte (2.5) und (2.6) induzierten Normen identisch sind und daher zum gleichen Konvergenzbegriff führen. Die strukturellen Eigenschaften der erzeugten Räume sind jedoch sehr unterschiedlich, was insbesondere bei der Betrachtung polynomialer Orthogonalreihen¹ in \mathbb{H} deutlich wird. Im Rahmen dieser Arbeit sind beide Sichtweisen von Bedeutung, da sich beispielsweise für einige theoretische Problemstellungen eine feinere Raumstruktur, induziert durch das \mathbb{R} -wertige innere Produkt (2.5), als sehr vorteilhaft² erweist. An den Stellen der Arbeit, wo die jeweilige Hilbert-Raumstruktur mit dem zugeordneten inneren Produkt maßgeblich von Bedeutung ist, wird dies durch die

¹cf. Kapitel 3.2.4 und Kapitel 3.2.5

²cf. Kapitel 4.1

erweiterte Bezeichnung $L^2(\Omega; \mathbb{H}; K)$ kenntlich gemacht, wobei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{H}$. In allen anderen Fällen wird die einfache Notation verwendet.

Es sei ferner angemerkt, dass aufgrund der Nichtkommutativität des Schiefkörpers \mathbb{H} die eingeführten Hilbert-Räume $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{R})$ und $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H})$ zudem als links- bzw. rechts-lineare Räume betrachtet werden können. Da sich jedoch alle weiteren Ausführungen in dieser Arbeit ausschließlich auf rechts-lineare Hilbert-Räume beziehen, kann auf eine explizite Unterscheidung verzichtet werden. Natürlich lassen sich alle erhaltenen Resultate in ähnlicher Weise auch auf links-lineare Hilbert-Räume übertragen.

2.2.3 Die Klasse der \mathbb{H} -holomorphen Funktionen

In der komplexen Funktionentheorie ist die Klasse der holomorphen Funktionen von zentraler Bedeutung, welche im Allgemeinen als Lösungen eines Systems von partiellen Differentialgleichungen, der *Cauchy-Riemann Gleichungen*, eingeführt werden. Auf der Grundlage der Holomorphie \mathbb{C} -wertiger Funktionen lässt sich die wichtige Eigenschaft der komplexen Differenzierbarkeit erklären und ferner bedeutende Integralformeln und Nachweisprinzipien ableiten. Neben dem Begriff holomorph werden häufig auch die Begriffe *regulär* oder *monogen* gebraucht.

Als Verallgemeinerung dieser zentralen Funktionenklasse auf die Algebra reeller Quaternionen versteht man die Klasse der \mathbb{H} -holomorphen (monogenen) Funktionen. Diese soll im Folgenden ausführlich eingeführt werden und das Konzept der hyperkomplexen Differenzierbarkeit nach H.R. MALONEK und K. GÜRLEBECK kurz erläutert werden. Außerdem werden einige strukturelle Eigenschaften \mathbb{H} -holomorpher Funktionen, wie beispielsweise die Funktionenklasse der monogenen Konstanten oder die Faktorisierung des Laplace-Operators, aufgezeigt. Bei der Bezeichnung der Operatoren wird die im Lehrbuch [Gürlebeck et al. 2006] eingeführte Notation verwendet, welche die klassische Bezeichnungsweise der komplexen Funktionentheorie systematisch auf den räumlichen Fall erweitert, allerdings genau entgegengesetzt zur historisch gewachsenen Standardnotation in der Clifford-Analysis (e.g. [Brackx et al. 1982]) ist.

Differenzierbarkeit und Holomorphie in \mathbb{H}

Im Gegensatz zur Algebra reeller oder komplexer Zahlen ist der Begriff der Differenzierbarkeit in \mathbb{H} weitaus schwieriger zu definieren und führt bei der Verallgemei-

nerung der reellen bzw. komplexen Ansätze nicht in jedem Fall zum gewünschten Resultat. Aus dem Versuch, die Differenzierbarkeit in \mathbb{H} mit Hilfe des Differenzenquotienten zu erhalten, resultierte bereits im Jahre 1947 die von N.M. KRYLOV [Krylov 1947] und A.S. MEJLIKHZHON [Mejlikhzhon 1948] getroffene Feststellung:

Theorem 2.2. *Im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{H}$ sei eine reell stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ gegeben. Falls überall in Ω der Grenzwert*

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \mathbf{h}^{-1} [f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})] =: 'f(\mathbf{x})$$

existiert, so hat f in Ω die Form

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{x}\mathbf{b} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}).$$

Beweis. Ein Beweis dieses Theorems findet sich in [Gürlebeck et al. 2006]. □

Die Differenzierbarkeit im Sinne des Differenzenquotienten ist demzufolge in \mathbb{H} nur für eine kleine Klasse von linearen Funktionen erklärt und erscheint somit aus funktionentheoretischer Sicht als wenig praktikabel. Ein anderer Zugang wurde durch A. SUDBERY [Sudbery 1979] verfolgt, welcher eine reguläre Funktion $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{H}$ durch die Existenz ihrer quaternionischen Ableitung definierte. Ausgangspunkt der Betrachtung war hierbei die lineare Approximierbarkeit, welche im Reellen bekanntlich mit der Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten gleichwertig ist. Im Höherdimensionalen sind diese unterschiedlichen Zugänge allerdings nicht mehr äquivalent, wodurch sich eine weitere Möglichkeit für die Definition der Differenzierbarkeit in \mathbb{H} ergibt. Verfolgt man ein analoges Vorgehen wie in der komplexen Funktionentheorie, so ist zuerst die quaternionische Form des totalen Differentials für eine reell stetig differenzierbare \mathbb{H} -wertige Funktion herzuleiten. In Anlehnung an die Ausführungen in [Gürlebeck et al. 2006] sei dazu durch $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ eine in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ reell stetig differenzierbare Funktion gegeben. Zunächst erhält man

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = dx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y} + dz \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die Differentiale dx, dy, dz lassen sich mit Hilfe der reduzierten Quaternion \mathbf{x} und ihrer Konjugierten $\bar{\mathbf{x}}$ durch

$$dx = \frac{1}{2}(d\mathbf{x} + d\bar{\mathbf{x}}), \quad dy = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}\mathbf{e}_1), \quad dz = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}\mathbf{e}_2)$$

ausdrücken, wodurch man nach entsprechendem Einsetzen die Beziehung

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} (d\mathbf{x} + d\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f}{\partial y} (\mathbf{e}_1 d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} \mathbf{e}_1) + \frac{\partial f}{\partial z} (\mathbf{e}_2 d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} \mathbf{e}_2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_2 \right) d\bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} d\mathbf{x} - \frac{\partial f}{\partial y} d\mathbf{x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial z} d\mathbf{x} \mathbf{e}_2 \right) \end{aligned}$$

erhält. Hierbei ist zu erkennen, dass sich das Differential $d\bar{\mathbf{x}}$ isolieren lässt. Der als Faktor auftretende partielle Differentialoperator wird als *verallgemeinerter Cauchy-Riemann-Operator*

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.7)$$

bezeichnet, welcher in Bezug auf die komplexe Funktionentheorie als räumliche Entsprechung des ebenen Cauchy-Riemann-Operators $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y}$ verstanden wird. Der korrespondierende *konjugierte verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Operator*

$$\partial := \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.8)$$

der folglich den konjugierten Cauchy-Riemann-Operator $\partial = \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y}$ in \mathbb{C} verallgemeinert, tritt in der obigen Formel hingegen nur verschränkt mit den Differentialen auf, was eine Auflösung nach dem Differential $d\mathbf{x}$ verhindert. Betrachtet man zum Vergleich den komplexen Fall, so resultieren diese Schwierigkeiten bei der Auflösung zum einen aus der Nicht-Kommutativität der quaternionischen Multiplikation und zum anderen aus der Tatsache, dass bereits die Variable \mathbf{x} die Gleichung $\bar{\partial}\mathbf{x} = 0$ nicht erfüllt und somit für die lineare Approximation ungeeignet ist. Diese Probleme konnten unter Verwendung der *Fueter-Variablen* [Fueter 1935]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}_1 &:= -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \mathbf{x} + \mathbf{x} \mathbf{e}_1) = y - x \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{z}_2 &:= -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 \mathbf{x} + \mathbf{x} \mathbf{e}_2) = z - x \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

gelöst werden, wobei

$$\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) : \mathbf{z}_1 = y - x \mathbf{e}_1, \mathbf{z}_2 = z - x \mathbf{e}_2\} \cong \mathbb{R}^3 \cong \mathcal{A}.$$

Im Gegensatz zur Variablen \mathbf{x} erfüllen nun beide Variablen \mathbf{z}_k , $k = 1, 2$ die Bedingungen $\bar{\partial}\mathbf{z}_k = 0$ bzw. $\mathbf{z}_k \bar{\partial} = 0$, was mit den Beziehungen

$$dy = d\mathbf{z}_1 + dx \mathbf{e}_1 \quad \text{und} \quad dz = d\mathbf{z}_2 + dx \mathbf{e}_2$$

auf die neue Darstellung des Differentials

$$df = (f\bar{\partial})dx + \frac{\partial f}{\partial y}dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z}dz_2 = (\bar{\partial}f)dx + dz_1\frac{\partial f}{\partial y} + dz_2\frac{\partial f}{\partial z}$$

führt. Verlangt man ferner das $f\bar{\partial} = 0$ bzw. $\bar{\partial}f = 0$, so entspricht dies der rechts- bzw. linksseitigen linearen Approximation durch

$$\ell(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{a}_k \mathbf{z}_k \quad \text{bzw.} \quad \ell(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{z}_k \mathbf{a}_k.$$

Daraus resultiert die von H.R. MALONEK [Malonek 1987] angegebene Definition der \mathbb{H} -Holomorphie.

Definition 2.3. Die Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ sei im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ reell stetig differenzierbar. Dann heißt f *rechts- \mathbb{H} -holomorph* in Ω , wenn in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ für $\mathbf{h} \rightarrow 0$ und für geeignete von \mathbf{x} abhängige Quaternionen \mathbf{a}_k gilt

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 \mathbf{a}_k (h_k - h_0 \mathbf{e}_k) + o(\mathbf{h}),$$

bzw. *links- \mathbb{H} -holomorph*, wenn

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 (h_k - h_0 \mathbf{e}_k) \mathbf{a}_k + o(\mathbf{h}).$$

Dabei bezeichnen h_k die Koordinaten von \mathbf{h} .

Dieses Konzept konnte später durch K. GÜRLEBECK und H.R. MALONEK [Gürlebeck & Malonek 1999] auch auf den allgemeinen Fall $C\ell_{0,n}$ -wertiger Funktionen übertragen werden und gilt daher als maßgeblicher Zugang für die Beschreibung der Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^{n+1} und der Definition einer hyperkomplexen Ableitung. Wie im Komplexen, wo die Holomorphie einer Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ gleichwertig mit der Bedingung $\bar{\partial}f = 0$ und ferner die komplexe Ableitung durch $\partial_z = \frac{1}{2}\partial$ definiert ist, lassen sich auch diese grundlegenden Eigenschaften \mathbb{C} -holomorpher Funktionen auf den räumlichen Fall übertragen.

Definition 2.4 (\mathbb{H} -Holomorphie). Eine stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ ist genau dann links- \mathbb{H} -holomorph (bzw. rechts- \mathbb{H} -holomorph) in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, wenn

$$\bar{\partial}f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (\text{bzw. } f\bar{\partial} = 0 \quad \text{in } \Omega). \quad (2.10)$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $\hat{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ wird als links- \mathbb{H} -anti-holomorph (bzw. rechts- \mathbb{H} -anti-holomorph) in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet, wenn

$$\partial \hat{f} = 0 \text{ in } \Omega \quad (\text{bzw. } \hat{f} \partial = 0 \text{ in } \Omega). \quad (2.11)$$

Definition 2.5 (Hyperkomplexe Ableitung in \mathbb{H}). Es sei $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ eine reell stetig differenzierbare Funktion und links- \mathbb{H} -holomorph (bzw. rechts- \mathbb{H} -holomorph) in Ω . Der Ausdruck $\frac{1}{2}\partial f$ (bzw. $\frac{1}{2}(f\partial)$) heißt *hyperkomplexe Ableitung* der Funktion f in \mathbb{H} , wobei ∂ den konjugierten verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Operator (2.8) bezeichnet.

Bemerkung 2.1. Infolge der Nicht-Kommutativität der Multiplikation in \mathbb{H} ist, wie bereits erwähnt, zwischen links- und rechts- \mathbb{H} -holomorphen Funktionen zu unterscheiden. In diesem Zusammenhang kann man ferner zeigen, dass eine Funktion f , die sowohl links- als auch rechts- \mathbb{H} -holomorph ist, zum Unterraum \mathcal{A} gehören muss, also $\bar{\partial}f = f\bar{\partial} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{A}$. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass eine allgemeine \mathbb{H} -holomorphe Funktion aus \mathbb{H} entweder links- oder rechts- \mathbb{H} -holomorph ist. Aus diesem Grund beschränken sich die Betrachtungen in dieser Arbeit im Wesentlichen auf links- \mathbb{H} -holomorphe Funktionen, die der Einfachheit halber im Folgenden als \mathbb{H} -holomorph oder gleichbedeutend als monogen bezeichnet werden. Unter diesen Konventionen wird für \mathbb{H} -holomorphe Funktionen häufig auch die Schreibweise $\bar{\partial}f = 0 \Leftrightarrow f \in \ker \bar{\partial}$ benutzt. An den Stellen der Arbeit, wo die Monogenität der Funktion von beiden Seiten von Bedeutung ist, wird gesondert darauf hingewiesen. Alle Ergebnisse lassen sich selbstverständlich auch auf rechts- \mathbb{H} -holomorphe Funktionensysteme übertragen.

Im Gegensatz zu den Cauchy-Riemann Bedingungen im komplexen Fall führt die Definition der \mathbb{H} -Holomorphie (2.10) im räumlichen Fall auf ein System von vier gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Für eine Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ ergeben sich die Monogenitätskriterien in expliziter Form zu

$$\left. \begin{aligned} f \in \ker \bar{\partial} &\Leftrightarrow \frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{\partial f^1}{\partial y} - \frac{\partial f^2}{\partial z} = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f^0}{\partial y} + \frac{\partial f^1}{\partial x} + \frac{\partial f^3}{\partial z} = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f^0}{\partial z} + \frac{\partial f^2}{\partial x} - \frac{\partial f^3}{\partial y} = 0, \\ &\Leftrightarrow -\frac{\partial f^1}{\partial z} + \frac{\partial f^2}{\partial y} + \frac{\partial f^3}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Eine für die weiteren Betrachtungen sehr vorteilhafte Formulierung der Monogenitätskriterien lässt sich durch eine geeignete Gruppierung der komponentenbezogenen Beziehungen (2.12) gewinnen. Hierzu sei $f = f_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3} + f_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2} = (f^0 + f^3\mathbf{e}_3) + (f^1\mathbf{e}_1 + f^2\mathbf{e}_2)$. Unter Verwendung der kompakten Form des Differentialoperators (2.7) erhält man eine zu (2.12) äquivalente Formulierung der Monogenitätskriterien durch

$$\left. \begin{aligned} f \in \ker \bar{\partial} &\Leftrightarrow \frac{\partial f_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3}}{\partial x} + \frac{\partial f_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}}{\partial x} + \frac{\partial f_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Anhand der letzten Darstellung lässt sich nun ein wichtiger Zusammenhang zwischen \mathbb{H} -holomorphen und \mathbb{H} -anti-holomorphen Funktionen (2.11) herstellen.

Korollar 2.1. *Es sei $f = \sum_{i=0}^3 f^i \mathbf{e}_i \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ eine \mathbb{H} -holomorphe Funktion im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Durch*

$$\hat{f} := f^0 - f^1 \mathbf{e}_1 - f^2 \mathbf{e}_2 + f^3 \mathbf{e}_3 \quad (2.14)$$

wird eine \mathbb{H} -anti-holomorphe Funktion in Ω definiert, so dass $\partial \hat{f} = 0$.

Beweis. Die Funktion $f \in \ker \bar{\partial}$ habe die Form $f = f_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3} + f_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2} = (f^0 + f^3\mathbf{e}_3) + (f^1\mathbf{e}_1 + f^2\mathbf{e}_2)$, wodurch also $\hat{f} = f_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3} - f_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}$. Mit (2.8) und den Beziehungen (2.13) folgt die Behauptung

$$0 \stackrel{!}{=} \partial \hat{f} = \left(\frac{\partial f_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3}}{\partial x} + \frac{\partial f_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right) - \left(\frac{\partial f_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}}{\partial x} + \frac{\partial f_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right) = 0.$$

□

Bemerkung 2.2. Im Vergleich zur komplexen Funktionentheorie sei in diesem Zusammenhang angemerkt, dass dort die Konjugation einer holomorphen Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ bereits auf die jeweilige anti-holomorphe Funktion \hat{f} führt, also $\hat{f} \equiv \bar{f}$ gilt. Für Funktionen aus \mathbb{H} trifft dies im Allgemeinen nicht zu. Eine Ausnahme bildet dabei die Teilmenge der \mathcal{A} -wertigen Funktionen in \mathbb{H} , wie sich anhand der letzten Betrachtungen unschwer erkennen lässt.

Abschließend soll noch eine weitere Teilmenge monogener Funktionen eingeführt werden, die insbesondere bei der praktischen Anwendung monogener Funktionensysteme eine wichtige Rolle spielt. Ausgangspunkt der Überlegung ist dabei die Frage, inwiefern sich zwei monogene Funktionen $f, g \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ unterscheiden,

wenn vorausgesetzt wird, dass die hyperkomplexen Ableitungen beider Funktionen $\frac{1}{2}\partial f = \frac{1}{2}\partial g$ identisch sind. Wie man aus der komplexen Theorie weiß, können sich zwei holomorphe Funktionen, welche die gleiche komplexe Ableitung besitzen, nur um eine \mathbb{C} -wertige Konstante $\gamma = \gamma^0 + \mathbf{i}\gamma^1$, $\gamma^0, \gamma^1 \in \mathbb{R}$ unterscheiden. In der räumlichen Theorie hingegen ist die Funktionenklasse der \mathbb{H} -holomorphen oder monogenen Konstanten weitaus reichhaltiger, wie das folgende Theorem zeigt.

Theorem 2.3 (\mathbb{H} -holomorphe Konstanten). *Es seien $f, g \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ zwei reell stetig differenzierbare Funktionen und \mathbb{H} -holomorph in Ω . Für die hyperkomplexen Ableitungen der Funktionen f und g soll ferner die Beziehung $\frac{1}{2}\partial f = \frac{1}{2}\partial g$ gelten. Dann unterscheiden sich die Funktionen f und g nur durch eine \mathbb{H} -holomorphe (monogene) Konstante*

$$\gamma(\underline{\mathbf{x}}) := \sum_{i=0}^3 \gamma^i(\underline{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_i,$$

wobei die Komponenten $\gamma^i(\underline{\mathbf{x}})$, $i = 0, 1, 2, 3$ einem System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial y} = -\frac{\partial \gamma^2}{\partial z}, \quad \frac{\partial \gamma^1}{\partial z} = \frac{\partial \gamma^2}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \gamma^0}{\partial y} = -\frac{\partial \gamma^3}{\partial z}, \quad \frac{\partial \gamma^0}{\partial z} = \frac{\partial \gamma^3}{\partial y} \quad (2.15)$$

genügen.

Beweis. Nach Voraussetzung sind $f, g \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ monogen in Ω , wonach auch die Differenz eine monogene Funktion $h := f - g$ in Ω ist. Da ferner die hyperkomplexe Ableitung von h aufgrund der Bedingung $\frac{1}{2}\partial h = \frac{1}{2}\partial f - \frac{1}{2}\partial g$ zu Null werden muss, erhält man folglich die Bedingungen $\frac{1}{2}\partial h = \bar{\partial}h = 0$. Dies ist äquivalent zur Forderung

$$0 \stackrel{!}{=} \partial h + \bar{\partial}h = (\partial + \bar{\partial})h = \frac{\partial h}{\partial x},$$

die, wie man leicht einsieht, durch eine Funktion $h = \gamma(\underline{\mathbf{x}})$ in den Koordinaten y, z befriedigt wird. Das System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, welchem die monogene Konstante zusätzlich genügen muss, folgt zwangsläufig aus den Bedingungen $\partial \gamma(\underline{\mathbf{x}}) = \bar{\partial} \gamma(\underline{\mathbf{x}}) = 0$. \square

Anhand von Theorem 2.3 lassen sich im Weiteren einige wichtige strukturelle Eigenschaften monogener Konstanten ableiten. Zunächst ist festzustellen, dass eine monogene Funktion $h \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ genau dann eine monogene Konstante ist, wenn $h \in \ker \partial \cap \ker \bar{\partial}$ oder gleichbedeutend, wenn die Komponenten von h Lösung des

Differentialgleichungssystemen (2.15) sind. Betrachtet man die Differentialgleichungen des Systems (2.15) etwas genauer, so lassen sich diese zu zwei entkoppelten Differentialgleichungssystemen zusammenfassen, infolge dessen sich die monogene Konstante rein strukturell

$$h = h_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3} + h_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2} = (h^0 + h^3\mathbf{e}_3) + (h^1\mathbf{e}_1 + h^2\mathbf{e}_2)$$

zerlegen lässt. Man schlussfolgert leicht, dass auch die einzelnen Komponenten $h_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3}$, $h_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}$ für sich genommen wiederum eigenständige monogene Konstanten $h_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3}, h_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2} \in \ker \partial \cap \ker \bar{\partial}$ sind und ferner als Lösungen eines komplexen Cauchy-Riemann Systems

$$\frac{\partial h^i}{\partial y} = -\frac{\partial h^j}{\partial z}, \quad \frac{\partial h^i}{\partial z} = \frac{\partial h^j}{\partial y},$$

wobei $(i, j) = (0, 3)$ bzw. $(i, j) = (1, 2)$, interpretiert werden können. Demnach sind für eine monogene Konstante $h \in \ker \partial \cap \ker \bar{\partial}$, mit der Zerlegung $h = h_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3} + h_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}$, die Aufspannungen $h_{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3} \in \text{span}\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3\}$ wie auch $h_{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2} \in \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ isomorph zu \mathbb{C} .

Eine Klasse monogener Differentialoperatoren

Gegenstand der Betrachtung sei nun die Anwendung der hyperkomplexen Ableitung $\frac{1}{2}\partial$ auf eine monogene Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$. Im reellen Sinne lässt sich diese bekanntlich als partielle Ableitung einer \mathbb{H} -wertigen Funktion bezüglich der x -Koordinate interpretieren. In Verallgemeinerung dieser Sichtweise wird nun eine spezielle Klasse von monogenen Differentialoperatoren definiert, welche darüber hinaus mit den partiellen Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen y und z in Beziehung gesetzt werden kann.

Definition 2.6. Auf der Grundlage des verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Operators (2.7) seien die Differentialoperatoren

$$\bar{\partial}_i = \frac{1}{2} \overline{\partial \mathbf{e}_i} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_i \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.16)$$

und die zugeordneten konjugierten Differentialoperatoren

$$\partial_i = \frac{1}{2} \partial \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{e}_i \quad (2.17)$$

definiert, mit $i = 0, 1, 2$.

Bemerkung 2.3. Die hyperkomplexe Ableitung nach Definition 2.5 ist dabei als Sonderfall $\frac{1}{2}\partial = \partial_0$ der eingeführten Differentialoperatoren (2.17) enthalten.

Im Folgenden werden zunächst einige wichtige Eigenschaften der eingeführten Operatoren gezeigt.

Lemma 2.2. *Es sei $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ eine monogene Funktion. Dann folgt*

$$\bar{\partial}_0 f = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}_1 f = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}_2 f = 0.$$

Beweis. Da nach Voraussetzung $f \in \ker \bar{\partial}$ ist, folgt die Behauptung aus (2.16). \square

Lemma 2.3. *Es sei $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ eine monogene Funktion. Zwischen den Differentialoperatoren (2.17) und den partiellen Ableitungen bezüglich der kartesischen Koordinatenrichtungen x, y, z besteht der Zusammenhang*

$$\partial_0 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.18)$$

Beweis. Der Beweis verwendet im Wesentlichen die in (2.12) explizit gegebenen Monogenitätskriterien. Nach einfacher Rechnung erhält man für die erste Gleichung der Behauptung

$$\begin{aligned} \partial_0 f &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f^0}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f^1}{\partial y} + \frac{\partial f^2}{\partial z}}_{\equiv \partial f^0 / \partial x} \right) + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial f^0}{\partial y} - \frac{\partial f^3}{\partial z}}_{\equiv \partial f^1 / \partial x} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial f^0}{\partial z} + \frac{\partial f^3}{\partial y}}_{\equiv \partial f^2 / \partial x} \right) \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial f^3}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f^1}{\partial z} - \frac{\partial f^2}{\partial y}}_{\equiv \partial f^3 / \partial x} \right) \mathbf{e}_3 \right] = \frac{\partial f^0}{\partial x} + \frac{\partial f^1}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f^2}{\partial x} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f^3}{\partial x} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

Analog lässt sich die Behauptung für die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f^0}{\partial y} - \underbrace{\frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{\partial f^3}{\partial z}}_{\equiv \partial f^0 / \partial y} \right) + \left(\frac{\partial f^1}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{\partial f^2}{\partial z}}_{\equiv \partial f^1 / \partial y} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial f^1}{\partial z} - \frac{\partial f^3}{\partial x}}_{\equiv \partial f^2 / \partial y} \right) \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial f^3}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial f^0}{\partial z} + \frac{\partial f^2}{\partial x}}_{\equiv \partial f^3 / \partial y} \right) \mathbf{e}_3 \right] = \frac{\partial f^0}{\partial y} + \frac{\partial f^1}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f^2}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f^3}{\partial y} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

und schließlich für die dritte Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_2 f &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f^0}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^3}{\partial y}}_{\equiv \partial f^0 / \partial z} \right) + \left(\frac{\partial f^1}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial f^2}{\partial y} + \frac{\partial f^3}{\partial x}}_{\equiv \partial f^1 / \partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{\partial f^1}{\partial y}}_{\equiv \partial f^2 / \partial z} \right) \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial f^3}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial f^0}{\partial y} - \frac{\partial f^1}{\partial x}}_{\equiv \partial f^3 / \partial z} \right) \mathbf{e}_3 \right] = \frac{\partial f^0}{\partial z} + \frac{\partial f^1}{\partial z} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f^2}{\partial z} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f^3}{\partial z} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

zeigen. □

Weiterhin kann ein beliebiger Differentialoperator aus (2.17) jeweils mit Hilfe der beiden anderen Operatoren dargestellt werden.

Lemma 2.4. *Es sei $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ eine monogene Funktion. Zwischen den Differentialoperatoren (2.17) gilt die Beziehung*

$$\partial_0 f = -\mathbf{e}_1 \partial_1 f - \mathbf{e}_2 \partial_2 f. \quad (2.19)$$

Beweis. Eine Auswertung der linken Seite von Gleichung (2.19) liefert unter Verwendung der Monogenitätskriterien (2.12) die Beziehung

$$\partial_0 f = \left(\frac{\partial f^1}{\partial y} + \frac{\partial f^2}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial f^0}{\partial y} + \frac{\partial f^3}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial f^0}{\partial z} - \frac{\partial f^3}{\partial y} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial z} - \frac{\partial f^2}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3.$$

Nach einfacher Umordnung der letzten Gleichung und Anwendung der Beziehungen (2.18) erhält man

$$\begin{aligned} \partial_0 f &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial y} - \frac{\partial f^0}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f^3}{\partial y} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial f^2}{\partial y} \mathbf{e}_3 \right) + \left(\frac{\partial f^2}{\partial z} - \frac{\partial f^3}{\partial z} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial f^0}{\partial z} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f^1}{\partial z} \mathbf{e}_3 \right) \\ &= -\mathbf{e}_1 \partial_1 f - \mathbf{e}_2 \partial_2 f \end{aligned}$$

und damit die Behauptung des Lemmas. □

Bemerkung 2.4. Die systematische Einführung der Differentialoperatoren (2.16) und (2.17) auf der Grundlage des verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Operators war ferner durch den praktischen Hintergrund dieser Arbeit, der räumlichen Verallgemeinerung der Kolosov-Muskhelishvili Formeln, motiviert. Um dies zu verdeutlichen, werden zunächst die entsprechenden \mathbb{C} -wertigen Operatoren

$$\partial_0 \equiv \partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \partial_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

betrachtet. Aus der Kommutativität der Multiplikation und der Definition der Operatoren lässt sich für eine holomorphe Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ die zu Relation (2.19) äquivalente Aussage $\partial_0 f = -\mathbf{i} \partial_1 f$ erhalten. Für die ebenen Kolosov-Muskhelishvili Gleichungen folgt daraus, dass sich alle differentiellen Beziehungen mit Hilfe eines einzigen Differentialoperators ausdrücken lassen. Demzufolge ist im Komplexen eine kategorische Unterscheidung der Differentialoperatoren ∂_0 und ∂_1 nicht notwendig und außerdem auch nicht vordergründig sichtbar, da bekanntlich der Operator ∂_0

die komplexe Ableitung nach z bezeichnet. Im Gegensatz dazu werden durch Gleichung (2.19) im räumlichen Fall nun drei Operatoren in Beziehung gesetzt, was eine explizite Unterscheidung der Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ notwendigerweise nach sich zieht.

Harmonische Funktionen als Zerlegung monogener und anti-monogener Funktionen

Wie aus der komplexen Funktionentheorie bekannt, lässt sich der ebene Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ mit Hilfe der komplexen Differentialoperatoren $\Delta = 4 \bar{\partial}_z \partial_z$ faktorisieren, was bedeutet, dass jede holomorphe (bzw. anti-holomorphe) Funktion gleichzeitig auch harmonisch ist.

Diese wichtige Eigenschaft lässt sich auch auf die Klasse der monogenen Funktionen übertragen.

Definition 2.7. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $f \in C^2(\Omega; \mathbb{H})$ zweimal reell stetig differenzierbar in Ω . Die Funktion f heißt *harmonisch* in Ω , falls $\Delta f = 0$ in Ω , wobei $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ den räumlichen Laplace-Operator bezeichnet.

Auf der Grundlage von Definition 2.7 lässt sich die Faktorisierung des Laplace-Operators unter Verwendung der Cauchy-Riemann-Typ Differentialoperatoren (2.16) und der korrespondierenden konjugierten Operatoren (2.17) auf den räumlichen Fall verallgemeinern. Als direkte Konsequenz aus Definition 2.6 folgt die Faktorisierung

$$\Delta = 4 \bar{\partial}_i \partial_i = 4 \partial_i \bar{\partial}_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.20)$$

Bemerkung 2.5. Für $i = 0$ erhält man den zur komplexen Theorie korrespondierenden Fall, wonach sich der Raum der harmonischen Funktionen in die Teilräume der monogenen und anti-monogenen Funktionen zerlegen lässt.

Aus der Faktorisierung (2.20) lässt sich ferner eine wichtige Eigenschaft der eingeführten Differentialoperatoren (2.17) ableiten, wonach diese, angewendet auf eine monogene Funktion $f \in C^2(\Omega; \mathbb{H})$, erneut auf eine monogene Funktion

$$\partial_i f \in \ker \bar{\partial}, \quad i = 0, 1, 2$$

abbilden. Operatoren, die diese Abbildungseigenschaft besitzen, werden im Rahmen der Arbeit speziell als monogene Operatoren bezeichnet.

Bemerkung 2.6. In dem Zusammenhang sei bemerkt, dass dies für $i = 0$ bereits eine Grundvoraussetzung für die Definition der hyperkomplexen Ableitung darstellt und daher bekanntermaßen zutrifft. Für $i = 1, 2$ hingegen treten die Basiselemente \mathbf{e}_i in den Differentialoperatoren (2.17) jeweils als linksseitige Multiplikatoren der Funktion auf, wodurch zunächst nicht davon ausgegangen werden konnte, dass die Operatoren ∂_i , $i = 1, 2$ ebenfalls auf den Raum der monogenen Funktionen abbilden.

Aus der Faktorisierung des Laplace-Operators erhält man wie im ebenen Fall die Aussage, dass jede \mathbb{H} -holomorphe Funktion in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ auch gleichzeitig eine harmonische Funktion in Ω ist. Alle bekannten Sätze der harmonischen Analysis lassen sich demzufolge auch auf die hyperkomplexe Funktionentheorie übertragen.

Integration und Stammfunktionen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen

Eine zentrale Bedeutung in der ebenen und räumlichen Funktionentheorie kommt dem *Integralsatz von Cauchy* zu. Im Komplexen ist die Kernaussage dieses Satzes, dass für eine im Gebiet Ω holomorphe Funktion f das Integral entlang einer geschlossenen stückweise glatten Kurve, welche ganz in Ω verläuft, stets den Wert Null besitzt. Aufbauend auf dieses funktionentheoretisch sehr weit reichende Resultat lassen sich beispielsweise der Begriff der holomorphen Stammfunktion erklären und die *Integralformel von Cauchy* beweisen, welche wiederum die Grundlage für Laurentreihenentwicklungen und den Residuensatz liefert. In diesem Abschnitt werden daher die in dieser Arbeit benötigten Integralsätze für Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ bereitgestellt und das Konzept der \mathbb{H} -holomorphen Stammfunktion eingeführt. Eine Zusammenfassung der historischen Entwicklung und ein ausführlicher Beweis der folgenden Theoreme findet sich in [Gürlebeck et al. 2006].

Theorem 2.4 (Integralsatz von Cauchy in \mathbb{H}). *Es seien $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet von endlichem Zusammenhang mit einem hinreichend glatten Rand $\partial\Omega$, so dass stets die Flächennormale nach außen zeigt. Die Funktion f sei in Ω rechts- \mathbb{H} -holomorph und die Funktion g links- \mathbb{H} -holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^* g(\mathbf{x}) = 0.$$

Im Unterschied zur komplexen Formulierung des Integralsatzes ist in \mathbb{H} die rechts- bzw. links- \mathbb{H} -Holomorphie der Funktionen f, g zu beachten. Die Differentialform $d\mathbf{x}^*$ bezeichnet dabei das normierte Oberflächenelement mit nach außen gerichteter

Flächennormale, infolge dessen die angegebene Reihenfolge der Integranden und des Differentials zu berücksichtigen ist. Um zur Verallgemeinerung der Integralformel von Cauchy zu gelangen, wird zunächst die folgende Funktion definiert.

Definition 2.8. Die Funktion

$$E_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad (2.21)$$

heißt *Cauchy-Kern* im \mathbb{R}^3 .

Der Cauchy-Kern ist eine links- und rechts- \mathbb{H} -holomorphe Funktion, welcher gewissermaßen die schwächste isolierte Singularität einer \mathbb{H} -holomorphen Funktion in einem Punkt beschreibt. In der komplexen Funktionentheorie ist der Cauchy-Kern durch

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad z \neq 0$$

definiert und damit zur z -Potenz vom Homogenitätsgrad -1 äquivalent. Dieser strukturelle Zusammenhang zwischen Kern- und Basisfunktion wird an späterer Stelle auch für die in dieser Arbeit konstruierten \mathbb{H} -holomorphen Funktionensysteme gezeigt. Damit erhält man die Cauchysche Integralformel in \mathbb{H} :

Theorem 2.5 (Integralformel von Cauchy in \mathbb{H}). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand, dessen Flächennormale nach außen orientiert ist. Ferner sei $f \in C^1(\bar{\Omega})$ links- \mathbb{H} -holomorph, dann gilt*

$$\int_{\partial\Omega} E_2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Schließlich soll der Begriff der holomorphen Stammfunktion in \mathbb{C} auch auf den räumlichen Fall verallgemeinert werden. Wie eingangs bereits angedeutet, lässt sich in der ebenen Theorie die Stammfunktion einer holomorphen Funktion sehr einfach aus dem Integralsatz von Cauchy herleiten. Eine Verallgemeinerung auf den räumlichen Fall ist auf diesem Weg jedoch nicht möglich, da die Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale im Höherdimensionalen verloren geht. Ein anderer Zugang findet sich in [Gürlebeck et al. 2006], bei dem die hyperkomplexe Integration einer \mathbb{H} -holomorphen Funktion als rechts-inverser Operator zur hyperkomplexen Ableitung $\frac{1}{2}\partial$ definiert wird.

Definition 2.9 (\mathbb{H} -holomorphe Stammfunktion). Als \mathbb{H} -holomorphe Stammfunktion einer \mathbb{H} -holomorphen Funktion f wird jede \mathbb{H} -holomorphe Funktion F mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{2}\partial F = f \quad (2.23)$$

bezeichnet. Falls für ein gegebenes $f \in \ker \bar{\partial}$ eine solche Funktion F existiert, so schreiben wir kurz $\mathcal{P}f := F$.

Es sei angemerkt, dass der *adjungierte Teodorescu-Operator* (cf. [Spröckig 1978]), welcher als Faltung mit der Fundamentallösung des adjungierten Cauchy-Riemann Operators ∂ definiert ist, ebenfalls einen rechts-inversen Operator zu $\frac{1}{2}\partial$ darstellt und daher auch als algebraische Primitive einer \mathbb{H} -holomorphen Funktion interpretiert werden kann. In der Operatortheorie wurden unter Verwendung dieses Zugangs algebraische Lösungsdarstellung für eine Vielzahl von Randwertproblemen der mathematischen Physik (e.q. [Gürlebeck & Spröckig 1989, Spröckig 1993, Gürlebeck & Spröckig 1995]) konstruiert. Ein wesentlicher Unterschied zur eingeführten \mathbb{H} -holomorphen Stammfunktion (2.23) besteht allerdings darin, dass durch den adjungierten Teodorescu-Operator monogene Funktionen auf harmonische Funktionen abgebildet werden. Demzufolge lässt sich für diese Primitive auch kein unmittelbarer Zusammenhang zur hyperkomplexen Ableitung herstellen. Aus diesem Grund wird bei allen weiteren Ausführungen der prinzipiellen Sichtweise in [Gürlebeck et al. 2006] gefolgt und die hyperkomplexe Integration als Umkehroperation der hyperkomplexen Ableitung betrachtet. Detailliertere Ausführungen, Existenzaussagen und konstruktive Ansätze zur Berechnung monogener Stammfunktionen finden sich in den jüngst veröffentlichten Arbeiten [Cação 2004, Cação & Gürlebeck 2004, Delanghe 2006, Cação & Gürlebeck 2006, Gürlebeck & Morais 2007, Eelbode & Sommen 2007].

2.3 Konstruktion räumlicher Kolosov-Muskhelishvili Formeln

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der räumlichen Verallgemeinerung der ebenen Kolosov-Muskhelishvili Formeln. Als Konstruktionsgrundlage dient hierbei die im Vorangegangenen eingeführte Algebra reeller Quaternionen. Von zentraler Bedeutung ist daher die Übertragung des Darstellungssatzes von Goursat auf den

dreidimensionalen Fall, wodurch eine Verknüpfung der reellen Theorie mit der hyperkomplexen Theorie hergestellt werden kann. Unter Verwendung dieses wichtigen Resultates lassen sich dann explizite Darstellungsformeln für die Verschiebungen und die Spannungen mit Hilfe zweier monogenen Funktionen konstruieren, die in Analogie zur Methode der komplexen Spannungsfunktionen als räumliche Entsprechungen der Kolosov-Muskhelishvili Formeln betrachtet werden.

2.3.1 Allgemeine Lösung nach Papkovic-Neuber

Den Ausgangspunkt der Konstruktion bilden die elastischen Grundgleichungen in den Verschiebungskomponenten (1.13). Für die Lösung dieses Systems existieren verschiedene Ansätze und Methoden, wie beispielsweise die klassischen Ansätze von J.C. MAXWELL [Maxwell 1927] und G. MORERA (q.v. [Love 1927]), bei welchen die Verschiebungen und Spannungen mit Hilfe von drei Funktionen ausgedrückt werden. Ein anderer Zugang ist durch den so genannten *Drei-Funktionen-Ansatz* von P. PAPKOVIC [Papkovic 1932] und H. NEUBER [Neuber 1934] gegeben. Diese konstruieren mit Hilfe einer räumlichen Spannungsfunktion, welche sich wiederum aus vier harmonischen Funktionen zusammensetzt, eine allgemeine Lösung für die elastischen Grundgleichungen. Aufgrund der engen Beziehung zwischen harmonischen und monogenen Funktionen stellt der Drei-Funktionen-Ansatz nach Papkovic-Neuber für die hier gegebene Problemstellung eine ideale Konstruktionsgrundlage dar.

Für den homogenen Teil der elastischen Grundgleichungen (1.13) ist die allgemeine Lösung nach Papkovic-Neuber durch

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\alpha\Phi_1, \\ 2Gv &= -\frac{\partial \Theta}{\partial y} + 2\alpha\Phi_2, \\ 2Gw &= -\frac{\partial \Theta}{\partial z} + 2\alpha\Phi_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

gegeben. Dabei bezeichnen Θ eine räumliche Spannungsfunktion und Φ_1, Φ_2, Φ_3 drei räumliche harmonische Funktionen. In Vorbereitung auf den im nachfolgenden Abschnitt verallgemeinerten Darstellungssatz von Goursat soll der Papkovic-Neuber-Ansatz (2.24) in Anlehnung an die detaillierteren Ausführungen in [Vocke 1969] noch einmal kurz erläutert werden.

Durch Substitution der Papkovic-Neuber-Lösung (2.24) in die homogenen elasti-

schen Grundgleichungen (1.13) erhält man zunächst

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2G}{1-2\nu} e - \Delta\Theta \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2G}{1-2\nu} e - \Delta\Theta \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2G}{1-2\nu} e - \Delta\Theta \right] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Wie man leicht einsieht, ist der Term in eckigen Klammern unabhängig von den Koordinaten und demzufolge

$$2Ge - (1-2\nu)\Delta\Theta = \text{konst.}$$

In der linearen Theorie lässt sich die Konstante vernachlässigen und wird daher zu Null gesetzt. Folglich ist

$$2Ge = (1-2\nu)\Delta\Theta. \quad (2.25)$$

Setzt man ferner die Lösungsdarstellung (2.24) in die Volumendehnung (1.9) ein, so ergibt sich die Beziehung

$$2Ge = -\Delta\Theta + 2\alpha \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} \right). \quad (2.26)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (2.25) und (2.26) liefert die Beziehung

$$2(1-\nu)\Delta\Theta = 2\alpha \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} \right). \quad (2.27)$$

Demnach setzt sich die Lösung Θ aus einem homogenen Anteil $\Phi_0 \in \ker \Delta$ und einem zur Gleichung (2.27) korrespondierenden inhomogenen Anteil zusammen. Bekanntlich führt dies auf die allgemeine Lösung des Problems

$$\Theta = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \quad (2.28)$$

wobei $\Phi_i \in \ker \Delta$, $i = 0, 1, 2, 3$. Die Anwendung des Operators Δ auf die Gleichung (2.28) liefert

$$\Delta\Theta = 2 \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} \right), \quad (2.29)$$

woraus ferner nach Vergleich mit Gleichung (2.27) die Beziehung

$$\alpha = 2(1-\nu)$$

resultiert. Schließlich lässt sich aus Gleichung (2.29) noch die wichtige Eigenschaft der Spannungsfunktion

$$\Delta\Delta\Theta = 0$$

gewinnen.

2.3.2 Der Darstellungssatz von Goursat in \mathbb{H}

Der Darstellungssatz von Goursat spielt bei der Verallgemeinerung der ebenen Ansätze eine zentrale Rolle, da er die reelle Theorie mit der hyperkomplexen Funktionentheorie in Beziehung setzt. Wichtige funktionentheoretische Werkzeuge bei der Herleitung des Satzes in \mathbb{C} sind die Existenz einer holomorphen Stammfunktion und das Prinzip der konjugiert harmonischen Funktion. Wie bereits ausgeführt, lässt sich das Konzept der \mathbb{H} -holomorphen Stammfunktion (2.23) auf den räumlichen Fall übertragen, indem man die monogene Primitive $\mathcal{P}f \in \ker \bar{\partial}$ einer monogenen Funktion f als rechts-inversen Operator zur hyperkomplexen Ableitung $\frac{1}{2}\partial$ betrachtet. Dieses Konzept ist für die folgenden Betrachtungen vollkommen ausreichend, da hierfür nur die Existenz einer \mathbb{H} -holomorphen Stammfunktion benötigt wird. Im Gegensatz dazu stellt sich die Übertragung des Prinzips der konjugiert harmonischen Funktion auf den räumlichen Fall etwas schwieriger dar. Genauer gesagt, sucht man nun zu einer gegebenen \mathbb{R} -wertigen harmonischen Funktion u drei weitere harmonische Funktionen u_i , $i = 1, 2, 3$, so dass die resultierende Funktion $u + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ monogen ist. Dieses Problem konnte bereits im Jahr 1979 durch A. SUDBERY [Sudbery 1979] für sternförmige Gebiete, welche den Ursprung enthalten, gelöst werden. SUDBERY konnte zeigen, dass für eine beliebige \mathbb{R} -wertige harmonische Funktion u der Ausdruck

$$f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + 2 \mathbf{Vec} \int_0^1 s^2 \left[\partial_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} ds$$

eine monogene Funktion mit u als Skalarteil definiert. Das ursprüngliche Theorem wurde allerdings für Funktionen u im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ bewiesen. Wie im Folgenden gezeigt wird, lässt sich die Beweisidee auch auf den \mathbb{R}^3 übertragen.

Korollar 2.2 (Konjugiert harmonische Funktionen im \mathbb{R}^3). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet, das den Ursprung enthält, und u eine reellwertige harmonische Funktion. Durch den Ausdruck*

$$f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + 2 \mathbf{Vec} \int_0^1 s \left[\partial_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} ds \quad (2.30)$$

wird eine monogene Funktion f definiert, welche $u = \mathbf{Sc}(f)$ als Skalarteil besitzt.

Beweis. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet, welches den Ursprung enthält. Der grundlegenden Beweisidee in [Sudbery 1979] folgend, ist dann zu zeigen, dass durch

den Ausdruck (2.30) eine monogene Funktion in Ω definiert wird. Der Einfachheit halber wird zunächst $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^2 \mathbf{e}_i x_i$ bezeichnet. Nun berechnet man

$$\begin{aligned} \mathbf{Sc} \int_0^1 s \left[\partial_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} ds &= \mathbf{Sc} \int_0^1 s \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_0} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 s \sum_{i=0}^2 x_i \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 s \frac{\partial u(s\mathbf{x})}{\partial s} ds. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration des letzten Ausdrucks ergibt sich

$$\mathbf{Sc} \int_0^1 s \left[\partial_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} ds = \frac{1}{2} u(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int_0^1 u(s\mathbf{x}) ds$$

und somit

$$f(\mathbf{x}) = 2 \int_0^1 s \left[\partial_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} ds + \int_0^1 u(s\mathbf{x}) ds.$$

Nach Voraussetzung muss schließlich gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \bar{\partial}_0 f(\mathbf{x}) = 2 \int_0^1 s \bar{\partial}_0 \left[\left[\partial_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} \right] ds + \int_0^1 \bar{\partial}_0 u(s\mathbf{x}) ds \\ &= 2 \int_0^1 s \left[s \left[\bar{\partial}_0 \partial_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \left[\bar{\partial}_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} \right] ds \\ &\quad + \int_0^1 s \left[\bar{\partial}_0 u(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}:=s\mathbf{x}} ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

womit Korollar 2.2 für konjugiert harmonische Funktionen im \mathbb{R}^3 vollständig bewiesen wäre. \square

Bemerkung 2.7. Durch eine lineare Substitution lässt sich dieses Resultat auch auf sternförmige Gebiete, welche nicht den Ursprung enthalten, übertragen.

Somit stehen nun alle funktionentheoretischen Werkzeuge, die im ebenen Fall für den Darstellungssatz benötigt werden, auch in der hyperkomplexen Theorie zur Verfügung.

Theorem 2.6 (Verallgemeinerter Darstellungssatz von Goursat). *Es sei Ω ein sternförmiges Gebiet und $F \in C^4(\Omega; \mathbb{R})$ Lösung der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$. Dann gibt es zwei monogene Funktionen Φ, Ψ in Ω , so dass*

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\bar{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) + \overline{\Phi(\mathbf{x})} \mathbf{x} + \Psi(\mathbf{x}) + \overline{\Psi(\mathbf{x})} \right] = \mathbf{Sc} \left(\bar{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x}) \right). \quad (2.31)$$

Beweis. Gegeben seien zwei beliebige monogene Funktionen $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^3 \varphi^i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$ und $\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^3 \psi^j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j$. Nach einfacher Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \Delta F &= \bar{\partial} \partial F = \partial \bar{\partial} F \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] [x\varphi^0 + y\varphi^1 + z\varphi^2 + \psi^0] \\ &= 2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) + x\Delta\varphi^0 + y\Delta\varphi^1 + z\Delta\varphi^2 + \Delta\psi^0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da nach Voraussetzung $\Phi, \Psi \in \ker \bar{\partial}$ und somit die Komponenten $\varphi^i, \psi^j \in \ker \Delta$ ($i, j = 0, \dots, 3$) sind, reduziert sich die Gleichung (2.32) auf

$$\Delta F = 2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) \in \ker \Delta,$$

woraus sogleich die Behauptung $\Delta\Delta F = 0$ folgt.

Im Umkehrschluss muss zudem gezeigt werden, dass auch jede beliebige Lösung $F \in \ker \Delta\Delta$ eine Darstellung nach (2.31) besitzt. Dazu wird zuerst das Konzept der konjugiert harmonischen Funktionen im \mathbb{R}^3 benötigt. Es sei $\Delta F =: P \in \ker \Delta$. Nach Korollar 2.2 existiert dann zu P eine konjugiert harmonische Funktion $Q = \sum_{i=1}^3 Q^i \mathbf{e}_i$, so dass

$$f = P + Q^1 \mathbf{e}_1 + Q^2 \mathbf{e}_2 + Q^3 \mathbf{e}_3 \in \ker \bar{\partial}.$$

Ferner sei mit

$$\Phi = \frac{1}{4} \mathcal{P} f = \varphi^0 + \varphi^1 \mathbf{e}_1 + \varphi^2 \mathbf{e}_2 + \varphi^3 \mathbf{e}_3$$

die \mathbb{H} -holomorphe Stammfunktion zu f bezeichnet. Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} \Delta [F - x\varphi^0 - y\varphi^1 - z\varphi^2] &= P - 2 \left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right] \\ &= P - 2 \mathbf{Sc} [\partial \Phi] = P - 4 \mathbf{Sc} \left[\frac{1}{2} \partial \Phi \right] \\ &= P - 4 \left[\frac{1}{4} \mathbf{Sc} f \right] = P - P = 0, \end{aligned}$$

dann folgert man leicht, dass

$$\psi^0 = F - x\varphi^0 - y\varphi^1 - z\varphi^2 \in \ker \Delta.$$

Schließlich lässt sich erneut nach Korollar 2.2 eine konjugiert harmonische Funktion $\underline{\Psi} = \sum_{i=1}^3 \psi^i \mathbf{e}_i$ zu ψ^0 konstruieren, so dass

$$\Psi = \psi^0 + \psi^1 \mathbf{e}_1 + \psi^2 \mathbf{e}_2 + \psi^3 \mathbf{e}_3 \in \ker \bar{\partial}.$$

Abschließend erhält man also

$$\begin{aligned} F &= x\varphi^0 + y\varphi^1 + z\varphi^2 + \psi^0 \\ &= x\varphi^0 + y\varphi^1 + z\varphi^2 + \frac{1}{2} (\Psi + \bar{\Psi}) \\ &= \mathbf{Sc}[\bar{\mathbf{x}}(\varphi^0 + \varphi^1 \mathbf{e}_1 + \varphi^2 \mathbf{e}_2 + \varphi^3 \mathbf{e}_3)] + \frac{1}{2} (\Psi + \bar{\Psi}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}} \Phi + \bar{\Phi} \mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\Psi + \bar{\Psi}), \end{aligned}$$

wodurch die räumliche Verallgemeinerung des Darstellungssatzes von Goursat vollständig bewiesen wäre. \square

Bemerkung 2.8. Es sei darauf hingewiesen, dass die Darstellung der biharmonischen Funktion nicht eindeutig ist.

2.3.3 Darstellung der Spannungs- und Verschiebungskomponenten mit Hilfe monogener Funktionen

Unter Verwendung des Resultates aus dem vorangegangenen Abschnitt lässt sich nun die Darstellung nach Goursat (2.31) mit der Lösung (2.28) identifizieren und man erhält eine äquivalente Darstellung der räumlichen Spannungsfunktion Θ durch

$$F = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{x}} \Phi + \bar{\Phi} \mathbf{x} + \Psi + \bar{\Psi}] = x\varphi^0 + y\varphi^1 + z\varphi^2 + \psi^0 \equiv \Theta.$$

Aus mathematischer Sicht bedeutet dies eine Verfeinerung der Papkovic-Neuber Gleichungen, da nun infolge des Darstellungssatzes von Goursat die drei wesentlichen harmonischen Funktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 im Papkovic-Neuber-Ansatz als Koordinaten einer monogenen Funktion Φ zueinander in Beziehung gesetzt werden. Demnach sind diese nicht unabhängig voneinander.

Um nun die Spannungen und Verzerrungen mit Hilfe der monogenen Funktionen Φ und Ψ auszudrücken, wird zunächst die Darstellung (2.31) in die Papkovic-Neuber Gleichungen (2.24) eingesetzt, woraus sich die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} 2G u &= - \left(x \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + \frac{\partial \psi^0}{\partial x} \right) + (2\alpha - 1) \varphi^0, \\ 2G v &= - \left(x \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + y \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} + \frac{\partial \psi^0}{\partial y} \right) + (2\alpha - 1) \varphi^1, \\ 2G w &= - \left(x \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + y \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} + \frac{\partial \psi^0}{\partial z} \right) + (2\alpha - 1) \varphi^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

ergeben. Erneutes Einsetzen von (2.31) in die Gleichung (2.26) liefert

$$2Ge = (1 - 2\nu)\Delta F = 2(\alpha - 1) \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right). \quad (2.34)$$

Die Verschiebungen in den Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen (1.7) können nun durch die erhaltenen Beziehungen (2.33) substituiert werden, wodurch sich die folgenden Darstellungen für die Verzerrungsgrößen ergeben:

$$\left. \begin{aligned} 2G \varepsilon_x &= - \left(x \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial x^2} \right) + 2(\alpha - 1) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x}, \\ 2G \varepsilon_y &= - \left(x \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial y^2} \right) + 2(\alpha - 1) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y}, \\ 2G \varepsilon_z &= - \left(x \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial z^2} \right) + 2(\alpha - 1) \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

und

$$\left. \begin{aligned} G \gamma_{xy} &= - \left(x \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial x \partial y} \right) + (\alpha - 1) \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \right), \\ G \gamma_{yz} &= - \left(x \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial y \partial z} + y \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial y \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial y \partial z} \right) + (\alpha - 1) \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} \right), \\ G \gamma_{xz} &= - \left(x \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x \partial z} + y \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial x \partial z} \right) + (\alpha - 1) \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\}$$

Die Verzerrungsgrößen im verallgemeinerten Hookeschen Gesetz (1.10) lassen sich dann durch die im vorigen Schritt erhaltenen Ausdrücke ersetzen. Mit (2.34) erhält man

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}e = \frac{G(2-\alpha)}{\alpha-1}e = (2-\alpha) \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right)$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= - \left(x \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial x^2} \right) + 2(\alpha - 1) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \\
&\quad + (2 - \alpha) \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - 2 \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) + 2(\alpha - 1) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \\
&\quad + (2 - \alpha) \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\alpha \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Die verbleibenden Spannungs- und Verzerrungsgrößen werden auf gleiche Weise konstruiert, weshalb diese hier nur kurz zusammengefasst werden. Unter Verwendung der biharmonischen Funktion F , welche nach (2.31) mit zwei monogene Funktionen Φ und Ψ in Beziehung gesetzt wird, lassen sich die Spannungs- und Verzerrungskomponenten dann wie folgt formulieren:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right), \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \left(-\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right), \\
\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha \left(-\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right), \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \right), \\
\tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} \right), \\
\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Analog erhält man für die hyperkomplexe Formulierung der Verschiebungsgleichungen (2.24) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned}
2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha \varphi^0, \\
2Gv &= -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha \varphi^1, \\
2Gw &= -\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha \varphi^2.
\end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Anhand der komponentenweise Formulierung der Spannungen (2.35) und Verschiebungen (2.36) wird deutlich, dass die partiellen Ableitungen der räumlichen Spannungsfunktion F eine wesentliche Rolle spielen. Daher werden diesbezüglich zunächst einige Vorbetrachtungen durchgeführt, welche die Konstruktionen in den darauf folgenden Abschnitten bedeutend vereinfachen werden. Ausgangspunkt ist dabei der Darstellungssatz von Goursat (2.31), wonach bekanntlich $F \in C^4(\Omega; \mathbb{R})$ eine reelle Funktion ist. Demzufolge lassen sich die partiellen Ableitungen von F explizit durch

$$\begin{array}{rcl}
 2 \frac{\partial F}{\partial x} & = & \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \mathbf{x} + \bar{\Phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \\
 2 \frac{\partial F}{\partial y} & = & \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \mathbf{e}_1 \Phi + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \mathbf{x} + \bar{\Phi} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \\
 2 \frac{\partial F}{\partial z} & = & \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \mathbf{e}_2 \Phi + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} \mathbf{x} + \bar{\Phi} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} \\
 & & \textcircled{1} \quad \textcircled{2a} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{2b} \quad \textcircled{3}
 \end{array}$$

angeben. Auf dieser Grundlage wird der Ansatz

$$f(\mathbf{x}) = 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

gemacht, für den im Folgenden die Anteile $\textcircled{1}$ - $\textcircled{4}$ getrennt voneinander zusammengefasst werden. Mit (2.18) und (2.19) erhält man für die aus $\textcircled{1}$ resultierenden Summanden

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \bar{\mathbf{x}} \left(-\mathbf{e}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_1 \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \bar{\mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
 &= -2z \mathbf{e}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2y \mathbf{e}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

In gleicher Weise ergibt sich für $\textcircled{2a}$ und $\textcircled{2b}$

$$\Phi + \mathbf{e}_1(-\mathbf{e}_1 \Phi) + \mathbf{e}_2(-\mathbf{e}_2 \Phi) + (\bar{\Phi} + \mathbf{e}_1 \bar{\Phi} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \bar{\Phi} \mathbf{e}_2) = \Phi - \mathbf{e}_3 \bar{\Phi} \mathbf{e}_3$$

sowie für $\textcircled{3}$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} \right) = 2 \bar{\partial}_0 \Psi + 2 \bar{\partial}_0 \bar{\Psi} = 2 \bar{\Psi} \bar{\partial}_0.$$

Für die aus $\textcircled{4}$ resultierenden Summanden berechnet man zunächst

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \mathbf{x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \mathbf{x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} \mathbf{x} = 2 \bar{\Phi} \bar{\partial}_0 \mathbf{x},$$

was sich mit Hilfe der Monogenitätskriterien (2.12) zu

$$\begin{aligned}
2 \overline{\Phi \partial_0} \mathbf{x} &= \left[\left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^3}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} \right) \mathbf{e}_3 \right] \mathbf{x} \\
&= 2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{x}
\end{aligned}$$

auswerten lässt. Nach längerer Rechnung erhält man

$$\begin{aligned}
&2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{x} \\
&= 2 \left[x \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} \mathbf{e}_2 \right) + y \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} \mathbf{e}_2 \right) \right. \\
&\quad \left. + z \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} \mathbf{e}_2 \right) - 2 y \mathbf{e}_3 \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + 2 z \mathbf{e}_3 \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \right] \\
&= 2 \left[\mathbf{x} (2 \bar{\partial}_0 \varphi^0) - 2 y \mathbf{e}_3 \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + 2 z \mathbf{e}_3 \frac{\partial \varphi^0}{\partial y} \right] \\
&= 2 \left[\mathbf{x} \bar{\partial}_0 (\Phi + \bar{\Phi}) - y \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} (\Phi + \bar{\Phi}) + z \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial y} (\Phi + \bar{\Phi}) \right] \\
&= 2 \mathbf{x} \overline{\Phi \partial_0} + 2 \left(-y \mathbf{e}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + z \mathbf{e}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + 2 \left(-y \mathbf{e}_3 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} + z \mathbf{e}_3 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Das Zusammenfassen der Teilergebnisse aus ①, ②, ③ und ④ führt dann auf

$$f(\mathbf{x}) = 2 \mathbf{x} \overline{\Phi \partial_0} + 2 (-y \mathbf{e}_3 \overline{\partial_2 \Phi} + z \mathbf{e}_3 \overline{\partial_1 \Phi}) + 2 \overline{\Psi \partial_0} + (\Phi - \mathbf{e}_3 \bar{\Phi} \mathbf{e}_3),$$

wodurch sich schließlich, mit $-y \mathbf{e}_3 = -\mathbf{x} \mathbf{e}_2 - \mathbf{z}_2$ und $z \mathbf{e}_3 = -\mathbf{x} \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}_1$ sowie der Beziehung

$$-2 \mathbf{x} \overline{\partial_0 \Phi} = 2 \mathbf{x} \overline{\Phi \partial_0} - 2 \mathbf{x} (\mathbf{e}_1 \overline{\partial_1 \Phi} + \mathbf{e}_2 \overline{\partial_2 \Phi}),$$

die gesuchte Darstellung

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \\
&= -2 \mathbf{x} \overline{\partial_0 \Phi} - 2 \mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 \Phi} - 2 \mathbf{z}_2 \overline{\partial_2 \Phi} + 2 \overline{\Psi \partial_0} + (\Phi - \mathbf{e}_3 \bar{\Phi} \mathbf{e}_3)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ergibt. Nach diesen umfangreichen Vorbereitungen werden nun im letzten Schritt räumliche Kolosov-Muskhelishvili Formeln in \mathbb{H} konstruiert. Das Konstruktionsprinzip der Gleichungen ist dabei im Wesentlichen vom komplexen Zugang motiviert.

2.3.4 Verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Verschiebungen

Unter Verwendung der hyperkomplexen Darstellung der Verschiebungskomponenten (2.36) wird für das Verschiebungsfeld der Ansatz

$$\begin{aligned} 2G(u + \mathbf{e}_1 v + \mathbf{e}_2 w) &= \left(-\frac{\partial F}{\partial x} + 2\alpha \varphi^0 \right) + \mathbf{e}_1 \left(-\frac{\partial F}{\partial y} + 2\alpha \varphi^1 \right) + \mathbf{e}_2 \left(-\frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha \varphi^2 \right) \\ &= - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial F}{\partial z} \right) + 2\alpha (\varphi^0 + \mathbf{e}_1 \varphi^1 + \mathbf{e}_2 \varphi^2) \end{aligned}$$

gemacht. Mit der Darstellung (2.37) und der Beziehung

$$\Phi - \mathbf{e}_3 \bar{\Phi} \mathbf{e}_3 = 2 (\varphi^0 + \mathbf{e}_1 \varphi^1 + \mathbf{e}_2 \varphi^2)$$

erhält man in Abhängigkeit der monogenen Funktionen Φ , Ψ eine räumliche \mathcal{A} -wertige Verschiebungsfunktion

$$2G(u + \mathbf{e}_1 v + \mathbf{e}_2 w) = \mathbf{x} \bar{\partial}_0 \bar{\Phi} + \mathbf{z}_1 \bar{\partial}_1 \bar{\Phi} + \mathbf{z}_2 \bar{\partial}_2 \bar{\Phi} - \bar{\Psi} \bar{\partial}_0 + \frac{2\alpha - 1}{2} (\Phi - \mathbf{e}_3 \bar{\Phi} \mathbf{e}_3), \quad (2.38)$$

welche als *verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Verschiebungen* bezeichnet wird.

2.3.5 Verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formeln für die Spannungen

Wie eingangs bereits erwähnt, sollen bei der Konstruktion der verallgemeinerten Spannungsgleichungen die strukturellen Eigenschaften der komplexwertigen Ansätze systematisch berücksichtigt werden. Dies bedeutet im Einzelnen, dass auch im räumlichen Fall die 1. Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen zunächst als Summe über die Normalspannungskomponenten angenommen wird, was aufgrund der gezeigten Invarianzeigenschaft (1.5) auf eine reell harmonische Funktion führen sollte. Im Gegensatz zur ebenen Theorie sind nun im räumlichen Fall zwei weitere Spannungsgleichungen zu finden, mit der besonderen Eigenschaft, dass sich durch Linearkombination mit der ersten Spannungsgleichung \mathbb{H} -wertige Spannungsfunktionen bezüglich der globalen Koordinatenrichtungen x, y, z konstruieren lassen. Die korrespondierenden Spannungskomponenten (1.1) sollten sich dann als skalare bzw. vektorielle Komponenten dieser \mathbb{H} -wertigen Funktionen einstellen.

I. Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen

Die Konstruktion der ersten verallgemeinerten Spannungsfunktion ist vollkommen analog zum komplexen Ansatz. Unter Verwendung der Spannungsdarstellungen (2.35) wird zuerst

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \left(-\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha \left(-\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) \\ &= 2\Delta F - \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

berechnet. Mit der Beziehung (2.29) in der hyperkomplexen Formulierung

$$\Delta F = 2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right)$$

und ferner den Eigenschaften der Differentialoperatoren (2.18) erhält man die als *I. verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen* bezeichnete Spannungsgleichung

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (4 - \alpha) (\partial_0 \Phi + \overline{\partial_0 \Phi}) = 2(4 - \alpha) \mathbf{Sc}[\partial_0 \Phi]. \quad (2.39)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die räumliche Spannungsgleichung (2.39) bis auf eine Materialkonstante vollkommen analog zur entsprechenden Formulierung in der Ebene (2.4) ist.

II. Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen

Für die zweite \mathbb{H} -wertige Spannungsgleichung werden die eingangs angesprochenen Konstruktionsprinzipien angewendet. Unter Verwendung der Beziehungen (2.35) lautet der Ansatz

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + 2\mathbf{e}_1 \tau_{xy} + 2\mathbf{e}_2 \tau_{xz} \\ &= -2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + 2\mathbf{e}_1 \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + 2\mathbf{e}_2 \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial f}{\partial x} + 2\alpha \left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mathbf{x}\overline{\partial_0\Phi} + 2\mathbf{z}_1\overline{\partial_1\Phi} + 2\mathbf{z}_2\overline{\partial_2\Phi} - 2\overline{\Psi\partial_0} - (\Phi - \mathbf{e}_3\overline{\Phi}\mathbf{e}_3) \right] \\
&\quad + 2\alpha \left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} \right) \right].
\end{aligned}$$

Eine Auswertung der partiellen Ableitungen für jeden einzelnen Summanden in eckigen Klammern liefert:

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & \frac{\partial}{\partial x} [2\mathbf{x}\overline{\partial_0\Phi}] = 2\overline{\partial_0\Phi} + 2\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x}\overline{\partial_0\Phi} = 2\mathbf{x}\overline{\partial_0\partial_0\Phi} + 2\overline{\partial_0\Phi}, \\
\text{(II)} \quad & \frac{\partial}{\partial x} [2\mathbf{z}_1\overline{\partial_1\Phi}] = -2\mathbf{e}_1\overline{\partial_1\Phi} + 2\mathbf{z}_1\frac{\partial}{\partial x}\overline{\partial_1\Phi} = 2\mathbf{z}_1\overline{\partial_0\partial_1\Phi} - 2\mathbf{e}_1\overline{\partial_1\Phi}, \\
\text{(III)} \quad & \frac{\partial}{\partial x} [2\mathbf{z}_2\overline{\partial_2\Phi}] = -2\mathbf{e}_2\overline{\partial_2\Phi} + 2\mathbf{z}_2\frac{\partial}{\partial x}\overline{\partial_2\Phi} = 2\mathbf{z}_2\overline{\partial_0\partial_2\Phi} - 2\mathbf{e}_2\overline{\partial_2\Phi}, \\
\text{(IV)} \quad & \frac{\partial}{\partial x} [-2\overline{\Psi\partial_0}] = -2\overline{\Psi\partial_0\partial_0}, \\
\text{(V)} \quad & \frac{\partial}{\partial x} [-\Phi + \mathbf{e}_3\overline{\Phi}\mathbf{e}_3] = -\partial_0\Phi + \mathbf{e}_3\overline{\partial_0\Phi}\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Ferner können die Ableitungsterme 1. Ordnung durch die Beziehungen

$$2\overline{\partial_0\Phi} - 2\mathbf{e}_1\overline{\partial_1\Phi} - 2\mathbf{e}_2\overline{\partial_2\Phi} - \partial_0\Phi + \mathbf{e}_3\overline{\partial_0\Phi}\mathbf{e}_3 = -2\left(\partial_0\Phi + \overline{\partial_0\Phi}\right) - \left(\overline{\partial_0\Phi} + \mathbf{e}_3\overline{\partial_0\Phi}\mathbf{e}_3\right)$$

und

$$2\alpha \left[\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} + \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} \right) \right] = \alpha \left[\left(\partial_0\Phi + \overline{\partial_0\Phi} \right) + \left(\overline{\partial_0\Phi} + \mathbf{e}_3\overline{\partial_0\Phi}\mathbf{e}_3 \right) \right]$$

zusammengefasst werden, wonach sich die II. *verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen* zu

$$\begin{aligned}
&\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + 2\mathbf{e}_1\tau_{xy} + 2\mathbf{e}_2\tau_{xz} \\
&= 2 \left[\mathbf{x}\overline{\partial_0\partial_0\Phi} + \mathbf{z}_1\overline{\partial_0\partial_1\Phi} + \mathbf{z}_2\overline{\partial_0\partial_2\Phi} - \overline{\Psi\partial_0\partial_0} \right] \\
&\quad + (\alpha - 2)\left(\partial_0\Phi + \overline{\partial_0\Phi}\right) + (\alpha - 1)\left(\overline{\partial_0\Phi} + \mathbf{e}_3\overline{\partial_0\Phi}\mathbf{e}_3\right)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

ergibt. Aus mechanischer Sicht ist die konstruierte Spannungsgleichung (2.40) eng mit der Koordinatenrichtung x verknüpft, da sich die Komponenten des Spannungstensors bezüglich der x -Koordinate in einfacher Weise durch Addition mit der ersten Spannungsgleichung (2.39)

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + (\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + 2\mathbf{e}_1\tau_{xy} + 2\mathbf{e}_2\tau_{xz}) = 2[\sigma_x + \mathbf{e}_1\tau_{xy} + \mathbf{e}_2\tau_{xz}]$$

ergeben und folglich auch isoliert werden können. Wie man leicht einsieht, gelingt eine ähnliche Auswertung der Spannungskomponenten bezüglich der Koordinatenrichtungen y, z nicht, wodurch nun im Gegensatz zur komplexen Theorie eine dritte räumliche Spannungsfunktion benötigt wird.

III. Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen

Die dritte Spannungsgleichung lässt sich auf ähnliche Weise herleiten, wenngleich eine kompakte Darstellung der resultierenden Terme weitaus schwieriger zu erhalten ist. Hierzu wird der folgende Ansatz

$$\begin{aligned}
& \sigma_x - \sigma_y + \sigma_z + 2\mathbf{e}_1\tau_{xy} + 2\mathbf{e}_3\tau_{yz} \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - 3\frac{\partial \varphi^1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \right) + 2\mathbf{e}_1 \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad + 2\mathbf{e}_3 \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} \right) \right] \\
&= \mathbf{e}_1 \left[-\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} - \alpha \left[(\overline{\partial_1 \Phi} + \mathbf{e}_3 \overline{\partial_1 \Phi} \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 (\partial_2 \Phi - \overline{\partial_2 \Phi}) \right] \right] \\
&= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mathbf{x} \overline{\partial_0 \Phi} + 2\mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 \Phi} + 2\mathbf{z}_2 \overline{\partial_2 \Phi} - 2\overline{\Psi \partial_0} - (\Phi - \mathbf{e}_3 \overline{\Phi} \mathbf{e}_3) \right] \\
&\quad - \alpha \mathbf{e}_1 \left[(\overline{\partial_1 \Phi} + \mathbf{e}_3 \overline{\partial_1 \Phi} \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 (\partial_2 \Phi - \overline{\partial_2 \Phi}) \right]
\end{aligned}$$

betrachtet. Erneut sind zunächst die partiellen Ableitungen für jeden einzelnen Summanden in eckigen Klammern auszuwerten

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & \frac{\partial}{\partial y} [2\mathbf{x} \overline{\partial_0 \Phi}] = 2\mathbf{x} \overline{\partial_1 \partial_0 \Phi} + 2\mathbf{e}_1 \overline{\partial_0 \Phi}, & \text{(II)} \quad & \frac{\partial}{\partial y} [2\mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 \Phi}] = 2\mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 \partial_1 \Phi} + 2\overline{\partial_1 \Phi}, \\
\text{(III)} \quad & \frac{\partial}{\partial y} [2\mathbf{z}_2 \overline{\partial_2 \Phi}] = 2\mathbf{z}_2 \overline{\partial_1 \partial_2 \Phi}, & \text{(IV)} \quad & \frac{\partial}{\partial y} [-2\overline{\Psi \partial_0}] = -2\overline{\Psi \partial_1 \partial_0}, \\
\text{(V)} \quad & \frac{\partial}{\partial y} [-\Phi + \mathbf{e}_3 \overline{\Phi} \mathbf{e}_3] = -\partial_1 \Phi + \mathbf{e}_3 \overline{\partial_1 \Phi} \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Die III. verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Spannungen ergibt sich schließlich nach Vereinfachung der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned}
& 2\tau_{xy} + \mathbf{e}_1(-\sigma_x + \sigma_y - \sigma_z) + 2\mathbf{e}_2\tau_{yz} \\
&= 2 \left[\mathbf{x} \overline{\partial_1 \partial_0 \Phi} + \mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 \partial_1 \Phi} + \mathbf{z}_2 \overline{\partial_1 \partial_2 \Phi} - \overline{\Psi \partial_1 \partial_0} \right] + 2\mathbf{e}_1 \overline{\partial_0 \Phi} \\
&\quad + (2 - \alpha) \overline{\partial_1 \Phi} - \alpha (\mathbf{e}_1 \partial_0 \Phi + \mathbf{e}_3 \overline{\partial_2 \Phi}) + (\alpha - 1) (\partial_1 \Phi - \mathbf{e}_3 \overline{\partial_1 \Phi} \mathbf{e}_3).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Diese lässt sich nach Konstruktion mit der Koordinatenrichtung y in Beziehung setzen, was in einfacher Weise aus der Addition mit $\mathbf{e}_1(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ hervorgeht.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Spannungskomponenten bezüglich der globalen Koordinatenrichtung z durch die \mathbb{H} -wertige Linearkombination

$$\begin{aligned} & -\mathbf{e}_2(\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + 2\mathbf{e}_1\tau_{xy} + 2\mathbf{e}_2\tau_{xz}) - \mathbf{e}_3(2\tau_{xy} + \mathbf{e}_1(-\sigma_x + \sigma_y - \sigma_z) + 2\mathbf{e}_2\tau_{yz}) \\ & = 2[\tau_{xz} + \mathbf{e}_1\tau_{yz} + \mathbf{e}_2\sigma_z] \end{aligned}$$

der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Gleichungen (2.40) und (2.41) berechnet werden können. Eine geschlossene Lösung lässt sich jedoch ebenfalls durch die im Vorangegangenen beschriebenen Konstruktionsansätze gewinnen. Daher sei abschließend noch die nützliche Beziehung

$$\begin{aligned} & 2\tau_{xz} + 2\mathbf{e}_1\tau_{yz} + \mathbf{e}_2(-\sigma_x - \sigma_y + \sigma_z) \\ & = 2\left[\overline{\mathbf{x}\partial_2\partial_0\Phi} + \mathbf{z}_1\overline{\partial_2\partial_1\Phi} + \mathbf{z}_2\overline{\partial_2\partial_2\Phi} - \overline{\Psi\partial_2\partial_0}\right] + 2\mathbf{e}_2\overline{\partial_0\Phi} \\ & \quad + (2 - \alpha)\overline{\partial_2\Phi} - \alpha(\mathbf{e}_2\partial_0\Phi - \mathbf{e}_3\overline{\partial_1\Phi}) + (\alpha - 1)(\partial_2\Phi - \mathbf{e}_3\overline{\partial_2\Phi}\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

angegeben, welche in Analogie zu den eingeführten Spannungsgleichungen (2.40) und (2.41) mit der globalen Koordinatenrichtung z in Zusammenhang steht.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden räumliche Verallgemeinerungen der komplexen Kolosov-Muskhelishvili Formeln konstruiert, welche auf funktionentheoretischen Ansätzen in der Algebra reeller Quaternionen basieren. Ausgangspunkt der Konstruktion war dabei der bekannte Drei-Funktionen-Ansatz nach Papkovic-Neuber, bei dem der räumliche Verschiebungszustand eines linear elastischen, homogenen, isotropen Körpers durch vier harmonische Funktionen beschrieben wird, die nach Konstruktion mit einer skalaren Bipotentialfunktion $F(\mathbf{x})$ in Beziehung gesetzt werden. Durch diese Beobachtung ließ sich der formale Zusammenhang zur Airyschen Spannungsfunktion im \mathbb{R}^2 herstellen. Darauf aufbauend konnte der Darstellungssatzes von Goursat nun auch in \mathbb{H} bewiesen werden, wofür im Wesentlichen zwei funktionentheoretische Hilfssätze benötigt wurden. Zum einen war dies das Konzept der konjugiert harmonischen Funktion in \mathbb{H} , für welches ein bereits bekanntes Resultat [Sudbery 1979] an

die in dieser Arbeit gegebene Problemstellung angepasst werden konnte. Ein algebraischer Zugang zur Bestimmung konjugiert harmonischer Funktionen findet sich in [Brackx et al. 2002], welcher aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiterverfolgt wurde. Eine zweite wichtige Voraussetzung bei der räumlichen Verallgemeinerung des Darstellungssatzes war die Existenz einer monogenen Stammfunktion zu einer gegebenen monogenen Funktion. Hier entstanden vor allem in den letzten Jahren zahlreiche Arbeiten, in denen neben der Existenz monogener Stammfunktionen [Delanghe 2006, Eelbode & Sommen 2007] auch explizite Verfahren zu deren Berechnung [Cação & Gürlebeck 2004; 2006, Gürlebeck & Morais 2007] angegeben wurden. Unter Verwendung dieser theoretischen Einzelresultate konnte dann gezeigt werden, dass sich jede skalare biharmonische Funktion äquivalent durch zwei monogene Funktionen Φ und Ψ darstellen lässt. Schließlich wurden \mathbb{H} -wertige Darstellungsformeln für die Verschiebungen und Spannungen konstruiert, welche eine große Ähnlichkeit zu den ebenen Darstellungsformeln besitzen und damit die Methode der komplexen Spannungsfunktionen auf den Raum verallgemeinern.

Abschließend sollen noch einige qualitative Eigenschaften der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln in \mathbb{H} zusammengefasst werden. Wie man anhand der Gleichung (2.38) bzw. den Gleichungen (2.39)-(2.41) leicht folgert, lässt sich der Verschiebungs- bzw. Spannungszustand eines dreidimensionalen Kontinuums allein durch zwei monogene Funktionen Φ und Ψ beschreiben. Daher eignen sich diese Darstellungen besonders als theoretische Grundlage für numerische Verfahren, indem man Φ und Ψ durch geeignete Reihenentwicklungen approximiert. Die auf diese Weise erhaltenen numerischen Lösungen haben die besondere Eigenschaft, dass sie in jedem Approximationsschritt die systembeschreibenden Differentialgleichungen exakt erfüllen und demzufolge einen mechanisch möglichen Zustand des Systems repräsentieren. Im Falle der Verschiebungen trifft das eben Beschriebene auch auf den klassischen Ansatz nach Papkovic-Neuber zu. Betrachtet man jedoch beide Methoden bezüglich ihrer strukturellen Eigenschaften, so verfeinern die Kolosov-Muskhelishvili Gleichungen den Papkovic-Neuber Ansatz dahingehend, dass nun aufgrund der Monogenitätsbedingungen die Beziehungen zwischen den harmonischen Funktionen näher charakterisiert werden. Aus funktionentheoretischer Sicht liegt ein weiterer wesentlicher Vorteil der hyperkomplexen Darstellung darin begründet, dass zur Beschreibung der Lösung ausschließlich monogene Funktionen als zentrale Funktionenklasse in \mathbb{H} verwendet werden. Dadurch stehen alle wichtigen Werkzeuge der

räumlichen Funktionentheorie sowohl für grundlagentheoretische Betrachtungen der Lösungsdarstellungen als auch für eine weiterführende Auswertung der erhaltenen Lösungen zur Verfügung.

Folgt man dem prinzipiellen Vorgehen in \mathbb{C} , so sind im nächsten Schritt geeignete monogene Reihenentwicklungen bereitzustellen, durch welche sich die monogenen Ansatzfunktionen Φ und Ψ hinreichend genau approximieren lassen. Von zentraler Bedeutung sind dabei in erster Linie die numerische Stabilität und die Vollständigkeit der Ansatzsysteme sowie deren generelle Anwendbarkeit im Kontext der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln. Außerdem ist zu untersuchen, inwiefern sich diese Systeme mit Hilfe der Kelvin-Transformation auf Funktionensysteme mit negativem Homogenitätsgrad abbilden lassen, um dann auch ähnlich wie im komplexen Fall räumliche Probleme der Bruchmechanik mit funktionentheoretischen Methoden behandeln zu können.

Kapitel 3

Reihenentwicklungen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen

*„Es kann eine vollkommene Folge nicht
aus einem unvollkommenen Prinzip entspringen.“*

François-René Vicomte de Chateaubriand

Ziel dieses Kapitels soll es sein, geeignete polynomiale Reihenentwicklungen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen zu diskutieren, welche im Speziellen für die Approximation der Funktionen Φ und Ψ in den verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln (2.38) und (2.39)-(2.41) verwendet werden können. Dazu werden zunächst die aus der ebenen Funktionentheorie bekannten Reihendarstellungen betrachtet und daraus die gewünschten Anforderungen und Eigenschaften für den räumlichen Fall abgeleitet. Es sei \mathbb{B}_2 die Einheitskreisscheibe und f eine holomorphe Funktion aus $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$. Bekanntlich erhält man durch Normierung der komplexen Potenzen

$$\tilde{z}^n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$$

ein in $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ vollständiges Orthonormalsystem $\{\tilde{z}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Aus der Orthogonalität und der Vollständigkeit folgt sofort, dass jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ bezüglich dieser Orthonormalbasis in eine Fourierreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{z}^n \beta_n, \quad \text{mit} \quad \beta_n = \langle \tilde{z}^n, f \rangle_{(\mathbb{B}_2; \mathbb{C})} = \int_{\mathbb{B}_2} \overline{\tilde{z}^n} f dV$$

entwickelt werden kann. Eine wichtige strukturelle Eigenschaft der komplexen Fourierreihe lässt sich dabei hinsichtlich ihrer Ableitung und Stammfunktion zeigen.

Betrachten wir zuerst für die unnormierten Basisfunktionen z^n sowohl die komplexe Ableitung $\partial_z z^n = n z^{n-1}$ als auch die Stammfunktion $\int z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$, so sieht man leicht ein, dass Ableitung und Integration von Elementen der Orthogonalbasis erneut auf einzelne Vielfache der Basis führen. Demzufolge lässt sich für eine komplexe Fourierreihe auch deren Ableitung und Stammfunktion rein formal wieder als Fourierreihe betrachten. Im Weiteren kann in der komplexen Theorie die globale Vollständigkeitsaussage mit der lokalen Approximierbarkeit in Beziehung gesetzt werden. Sei wiederum f eine holomorphe Funktion aus $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$, dann besitzt f im Innern von \mathbb{B}_2 eine gleichmäßig konvergente Taylorreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \Big|_{z=0}.$$

Bezüglich der verwendeten Basisfunktionen z^n ist die komplexe Taylorreihe also ebenfalls eine Orthogonalreihe in $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$. Dies resultiert in natürlicher Weise aus der Struktur der Ansatzfunktionen z^n , welche neben der für die Taylorreihe wichtigen Eigenschaft $z^n \in (\partial_z^{n+1} \setminus \partial_z^n) \cap \ker \bar{\partial}$ zugleich orthogonal zueinander sind. Folglich lassen sich für eine gegebene Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ die jeweiligen Fourier- und Taylorkoeffizienten direkt miteinander in Beziehung setzen, was die besondere Qualität dieser Orthogonalreihenentwicklungen in \mathbb{C} verdeutlicht.

Vor diesem Hintergrund sucht man auch im höherdimensionalen Fall nach \mathbb{H} -holomorphen Funktionensystemen, welche die besonderen strukturellen Eigenschaften der komplexen Orthogonalreihenentwicklungen verallgemeinern. Stand der Forschung sind hierbei im Wesentlichen zwei Funktionensysteme homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome, welche jeweils einige der im Vorangegangenen erläuterten Eigenschaften besitzen. Zum einen sind dies die so genannten *Fueter-Polynome*, welche im Jahr 1935 von K.R. FUETER [Fueter 1935] eingeführt wurden. Grundgedanke dieser Polynomklasse war die Verallgemeinerung der holomorphen z^n -Potenzen. Anstelle der komplexen Variablen z wurden nun Potenzen räumlicher Variablen betrachtet. Dies führte jedoch aus verschiedenen Gründen zu Problemen, da im \mathbb{R}^3 sowohl die Potenzen der reduzierten Quaternion $\mathbf{x} = x + y\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_2$ als auch die der monogenen Variablen $\mathbf{x} = x + \frac{1}{2}(y\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_2)$ nicht mehr monogen sind. Außerdem existieren jetzt im Gegensatz zur komplexen Theorie genau $n+1$ linear unabhängige Polynome vom Grad n , wonach die Vollständigkeit im \mathbb{R}^3 nicht alleinig durch die Potenzen der räumlichen Variablen zu erhalten ist. Diese Probleme konnten unter Verwendung der Fueter-Variablen (2.9) gelöst werden, anhand derer sich eine poly-

nomiale Basis in $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ angeben lässt. Mit Hilfe dieser Basis war es nun ebenfalls möglich, eine Taylorreihe für Funktionen in $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ anzugeben, deren Reihenglieder im Allgemeinen jedoch nicht orthogonal zueinander sind. Ein zweiter bedeutender Zugang, welcher insbesondere in den letzten Jahren durch die Arbeit von I. CAÇÃO [Cação 2004] maßgeblich entwickelt und praktisch handhabbar wurde, ist durch die Systeme monogener Kugelfunktionen in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ gegeben. Ausgangspunkt dieser Ansatzsysteme ist die Faktorisierung des Laplace-Operators $\Delta = \partial \bar{\partial}$, wonach die Anwendung des Differentialoperators ∂ auf eine harmonische Kugelfunktion eine monogene Kugelfunktion liefert. Auf der Grundlage dieses Ansatzes ließen sich vollständige Orthonormalsysteme [Cação et al. 2004] konstruieren, durch welche wichtige Beziehungen für die hyperkomplexe Ableitung [Cação et al. 2006] und für die Konstruktion monogener Stammfunktionen mit Hilfe eines Operatorzugangs [Cação & Gürlebeck 2006] erhalten werden konnten. Eine Zusammenfassung dieser Ergebnisse findet sich im Buch [Gürlebeck et al. 2006]. Somit konnten nun auch Funktionen aus $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ explizit in Form einer Fourierreihe angegeben werden, was bis dato nur durch einen aufwendigen Orthonormierungsprozess der Basiselemente realisiert werden konnte. Demzufolge wird durch diese Systeme die praktische Darstellbarkeit holomorpher Funktionen als Orthogonalreihe auf den räumlichen Fall verallgemeinert. Die besondere Eigenschaft, dass Orthogonalreihen durch die formale Anwendung der hyperkomplexen Ableitung bzw. der Stammfunktion erneut auf Orthogonalreihen führen, geht jedoch auch bei diesen Systemen verloren (q.v. [Cação et al. 2006, Cação & Gürlebeck 2006]). Aufgrund der fehlenden Ableitungseigenschaften, dass also die hyperkomplexe Ableitung von Basiselementen nicht erneut auf Elemente der Orthonormalbasis führt, lässt sich eine zu diesem System korrespondierende Taylorreihe nicht direkt konstruieren. Auf konstruktivem Wege ist es natürlich immer möglich, die Orthonormalsysteme bezüglich der monogenen Kugelfunktionen mit der oben erwähnten Taylorreihe der Fueter-Polynome in Beziehung zu setzen, indem man jedes Fueter-Polynom als Fourierreihe der Orthonormalbasis darstellt. Zwar führt dies nicht auf die gewünschte Orthogonalität der Ansatzfunktionen der Taylorreihe, da diese nur in eine andere Darstellung transformiert wurde, jedoch lässt sich auf diesem Weg zumindest rein prinzipiell ein Zusammenhang zwischen beiden Reihenentwicklungen herstellen. Erste Ansätze für die explizite Beschreibung dieser Transformation finden sich in [Cação 2004], bei denen jedoch nicht alle auftretenden Summanden berücksich-

sichtigt wurden. In [Gürlebeck & Morais 2007] konnte das Problem dann vollständig gelöst und explizite Gleichungen für die Transformationsbeziehungen zwischen den Basissystemen angegeben werden. Aufgrund der Komplexität der dabei erhaltenen Beziehungen sind diese jedoch nur mit rechentechnischen Hilfsmitteln zu bewältigen, wodurch sie für theoretische Betrachtungen als wenig praktikabel erscheinen. Daher kann man zusammenfassend feststellen, dass sich nach aktuellem Stand der Forschung nur wenige der gewünschten strukturellen Eigenschaften der komplexen Potenzreihen auf den höherdimensionalen Fall übertragen lassen, was zudem noch durch die Verwendung unterschiedlicher Funktionensysteme erschwert wird.

Daher werden zunächst die Abbildungseigenschaften der zur Darstellung der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln benötigten Differentialoperatoren (2.17) bezüglich der oben erläuterten Funktionensysteme studiert. Aufgrund der fehlenden Orthogonalität der Fueter-Polynome beschränken sich die Ausführungen in diesem Fall auf eine kurze Herleitung der Taylorreihe und einige interessante Abbildungseigenschaften der Differentialoperatoren, welche im Rahmen dieses polynomialen Systems näher charakterisiert werden können. Den Hauptgegenstand des Kapitels stellt jedoch die Betrachtung monogener Kugelfunktionen dar. Hierzu wird zuerst die Wirkungsweise der Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ auf die linear unabhängigen monogenen Kugelfunktionen, welche nach Konstruktion direkt aus den harmonischen Kugelfunktionen hervorgehen, untersucht. Anhand dieser Resultate werden anschließend wichtige strukturelle Beziehungen zwischen diesen Polynomen bewiesen und neuartige Orthonormalsysteme homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome konstruiert. Diese Systeme besitzen wie im komplexen Fall die besondere Qualität, dass die Ableitung und die Stammfunktion einzelner Basiselemente erneut auf Elemente der gleichen Basis führen. Auf der Grundlage dieser Basissysteme werden monogene Fourierreihen konstruiert, deren formale Ableitungen und Stammfunktionen wiederum Orthogonalreihen sind. Außerdem wird bewiesen, dass mit Hilfe dieser Basis vollständige Orthonormalsysteme für die unendlich dimensionalen Teilräume der orthogonalen Zerlegung des Hilbert-Raumes $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ nach [Caçõ 2004] angegeben werden können. Dies ist insbesondere für die praktische Anwendbarkeit des Dekompositionssatzes von Bedeutung. Aufbauend auf den strukturellen Eigenschaften dieser Ansatzsysteme werden ferner vollständige orthogonale Appell-Systeme in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ konstruiert und eine neuartige Taylorreihe homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome angegeben. Die auf diese Weise konstruierte Taylorreihe

besitzt die wichtige Eigenschaft einer Orthogonalreihe, wodurch Taylor- und Fourierkoeffizienten direkt in Beziehung gesetzt werden. Abschließend werden diese Systeme unter Verwendung der Kelvin-Transformation auch im Außengebiet studiert und eine (orthogonale) Laurentreihenentwicklung hergeleitet. Neben den Betrachtungen zu den Orthogonalreihenentwicklungen monogener Funktionen werden für diese Ansatzsysteme außerdem sehr kompakte Rekursionsformeln bewiesen.

3.1 Eine polynomiale Basis auf der Grundlage der Fueter-Polynome

Gegenstand dieses ersten Abschnitts sind die Fueter-Polynome, welche eine bedeutende Rolle bei der Herleitung der hyperkomplexen Differenzierbarkeit und bei der Definition der Taylorreihe in \mathbb{H} spielen. In erster Linie sollen die Abbildungseigenschaften der eingeführten Differentialoperatoren (2.17) bezüglich der polynomialen Basis im \mathbb{R}^3 studiert werden. Letztere wird bekanntlich durch die nach (2.9) definierten Fueter-Variablen \mathbf{z}_1 und \mathbf{z}_2 generiert.

Definition 3.1. Es sei $\vec{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$. Dann ist die „verallgemeinerte Potenz ν “ von \vec{z} durch die Beziehung

$$\vec{z}^\nu := \mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2} = \frac{\nu!}{|\nu|!} \sum_{\Pi(i_1, \dots, i_{|\nu|})} \mathbf{z}_{i_1} \cdots \mathbf{z}_{i_{|\nu|}}$$

definiert, wobei $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ ein Multiindex, mit $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$ und $\nu! = \nu_1! \nu_2!$, ist und folglich die Summe über alle Permutationen $(i_1, \dots, i_{|\nu|})$ zu nehmen ist.

Theorem 3.1 ([Malonek 1990]). *Für das Permutationsprodukt $\mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}$ gilt die Rekursionsformel*

$$\mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2} = \frac{1}{\nu_1 + \nu_2} \left[\nu_1 (\mathbf{z}_1^{\nu_1-1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}) \mathbf{z}_1 + \nu_2 (\mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2-1}) \mathbf{z}_2 \right].$$

Theorem 3.2 ([Brackx et al. 1982, Malonek 1990]). *Es sei $H_\nu^k(\vec{z}) := \mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}$, mit $|\nu| = k$.*

1. $H_\nu^k(\vec{z})$ sind homogene Polynome vom Grad k .
2. $H_\nu^k(\vec{z})$ sind monogene Funktionen.
3. $\{H_\nu^k(\vec{z})\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Basis in $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.

Des Weiteren werden die wichtigen Ableitungsbeziehungen der verallgemeinerten Potenzen benötigt.

Theorem 3.3 ([Gürlebeck et al. 2006]). *Es sei $\vec{z}^\nu = \mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}$. Für die partiellen Ableitungen ergeben sich die folgenden Beziehungen*

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{z}^\nu = -\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} \vec{z}^\nu - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}^\nu \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} \vec{z}^\nu = -\frac{\partial}{\partial y} \vec{z}^\nu \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}^\nu \mathbf{e}_2.$$

Demzufolge sind die verallgemeinerten Potenzen \vec{z}^ν sowohl links als auch rechts monogene Funktionen, wonach also $\bar{\partial} \vec{z}^\nu = \vec{z}^\nu \bar{\partial} = 0$.

Durch den Zusammenhang zwischen den Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ und den partiellen Ableitungen (2.18) lässt sich für das Theorem 3.3 eine geschlossene Formulierung angeben.

Korollar 3.1. *Es sei $\vec{z}^\nu = \mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}$. Unter Verwendung der Differentialoperatoren (2.17) lässt sich eine zu Theorem 3.3 äquivalente Darstellung durch*

$$\partial_0 \vec{z}^\nu = -\mathbf{e}_1 \partial_1 \vec{z}^\nu - \mathbf{e}_2 \partial_2 \vec{z}^\nu = -\partial_1 \vec{z}^\nu \mathbf{e}_1 - \partial_2 \vec{z}^\nu \mathbf{e}_2 \quad (3.1)$$

angeben.

Beweis. Der Beweis folgt direkt nach Substitution der Beziehungen (2.18) in den Gleichungen des Theorems 3.3. \square

Bemerkung 3.1. Es sei darauf hingewiesen, dass sich die gezeigten Eigenschaften zwischen den Differentialoperatoren (2.19) in der rechts-linearen Darstellung $\partial_0 \vec{z}^\nu = -\mathbf{e}_1 \partial_1 \vec{z}^\nu - \mathbf{e}_2 \partial_2 \vec{z}^\nu$ von (3.1) wiederfinden lassen.

Damit lässt sich auch die rekursiv gegebene hyperkomplexe Ableitung der verallgemeinerten Potenzen

$$\frac{1}{2} \partial (\mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}) = -\nu_1 (\mathbf{z}_1^{\nu_1-1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}) \mathbf{e}_1 - \nu_2 (\mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2-1}) \mathbf{e}_2$$

mit Hilfe der Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ formulieren, was letztendlich eine nähere Charakterisierung dieser Operatoren erlaubt.

Theorem 3.4 (Hyperkomplexe Ableitung der verallgemeinerten Potenzen). *Die hyperkomplexe Ableitung einer beliebigen verallgemeinerten Potenz $\vec{z}^\nu = \mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{H}$, ausgedrückt durch die Differentialoperatoren (2.17), ist durch*

$$\partial_0 \vec{z}^\nu = -\mathbf{e}_1 \partial_1 \vec{z}^\nu - \mathbf{e}_2 \partial_2 \vec{z}^\nu = -\partial_1 \vec{z}^\nu \mathbf{e}_1 - \partial_2 \vec{z}^\nu \mathbf{e}_2$$

gegeben, wobei für die Operatoren ∂_1 und ∂_2 die Beziehungen

$$\partial_1 \bar{z}^\nu = \begin{cases} 0 & : \nu_1 = 0, \\ \nu_1 (\mathbf{z}_1^{\nu_1-1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2}) & : \nu_1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \partial_2 \bar{z}^\nu = \begin{cases} 0 & : \nu_2 = 0, \\ \nu_2 (\mathbf{z}_1^{\nu_1} \times \mathbf{z}_2^{\nu_2-1}) & : \nu_2 \neq 0 \end{cases}$$

gelten.

Bemerkung 3.2. Wie schon mehrfach erwähnt, ist durch ∂_0 die hyperkomplexe Ableitung definiert. Als direkte Folgerung aus Theorem 3.4 lassen sich nun auch die Differentialoperatoren ∂_1 und ∂_2 vor dem Hintergrund der verallgemeinerten Potenzen $\bar{z}^\nu \in C^1(\Omega; \mathcal{A})$ als Ableitungen nach den Fueter-Variablen \mathbf{z}_1 und \mathbf{z}_2 charakterisieren.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich diese differentiellen Beziehungen auch umkehren lassen. Für eine beliebige verallgemeinerte Potenz \bar{z}^ν werden also polynomiale Primitiven bezüglich der Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ gesucht. Grundgedanke ist dabei, diese Primitivierungsoperatoren später über Potenzreihenentwicklungen in der verwendeten Basis stetig auf den ganzen Raum fortzusetzen. Hierzu wird zunächst definiert:

Definition 3.2 (Primitive verallgemeinerter Potenzen). Die Funktionen $\mathcal{P}_{\bar{z},i} \bar{z}^\nu \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ heißen *\mathbb{H} -holomorphe Primitive* zu einer beliebigen verallgemeinerten Potenz \bar{z}^ν bezüglich des Differentialoperators ∂_i , wenn

$$\mathcal{P}_{\bar{z},i} \bar{z}^\nu \in \ker \bar{\partial} \quad \text{und} \quad \partial_i [\mathcal{P}_{\bar{z},i} \bar{z}^\nu] = \bar{z}^\nu, \quad i = 0, 1, 2.$$

Im Folgenden soll die Anwendung der eingeführten Primitiven auf den verallgemeinerten Potenzen betrachtet werden. Wie man leicht einsieht, lassen sich die gesuchten Beziehungen für die Primitiven $\mathcal{P}_{\bar{z},1}$ und $\mathcal{P}_{\bar{z},2}$ in einfacher Weise aus Theorem 3.4 folgern. Daher wird mit der Konstruktion der $\mathcal{P}_{\bar{z},0}$ -Primitiven begonnen. Das Konstruktionsprinzip ist dabei in erster Linie durch eine geometrische Beobachtung motiviert, welche aus den Ableitungsbeziehungen der verallgemeinerten Potenzen resultiert. Anhand des folgenden einfachen Beispiels soll dieser Zugang zunächst verdeutlicht werden.

Beispiel 3.1. Gegeben sei das Polynom $\bar{z}^{(1,1)} = \mathbf{z}_1^1 \times \mathbf{z}_2^1$, für welches eine monogene Primitive $\mathcal{P}_{\bar{z},0} \bar{z}^{(1,1)}$ konstruiert werden soll, so dass $\partial_0 [\mathcal{P}_{\bar{z},0} \bar{z}^{(1,1)}] = \bar{z}^{(1,1)}$. Aufgrund

der Tatsache, dass die polynomiale Primitive $\mathcal{P}_{\vec{z},0} \vec{z}^{(1,1)}$ nach Voraussetzung monogen ist, muss sich diese folglich auch als Linearkombination der verallgemeinerten Potenzen vom Grad $n = 3$ darstellen lassen. Daher wird der Operator ∂_0 auf die Teilmenge $\{H_\nu^3(\vec{z})\}_{|\nu|=3}$ angewendet. Nach Theorem 3.4 erhält man

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 \vec{z}^{(3,0)} &= -3 \vec{z}^{(2,0)} \mathbf{e}_1, \\ \partial_0 \vec{z}^{(2,1)} &= -\vec{z}^{(2,0)} \mathbf{e}_2 - 2 \vec{z}^{(1,1)} \mathbf{e}_1, \\ \partial_0 \vec{z}^{(1,2)} &= -2 \vec{z}^{(1,1)} \mathbf{e}_2 - \vec{z}^{(0,2)} \mathbf{e}_1, \\ \partial_0 \vec{z}^{(0,3)} &= -3 \vec{z}^{(0,2)} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Anhand des Schemas (3.2) lässt sich erkennen, dass eine Primitive $\mathcal{P}_{\vec{z},0} \vec{z}^{(1,1)}$ auf zwei Wegen konstruiert werden kann, und zwar entweder durch Linearkombinationen der Polynome $\vec{z}^{(2,1)}$ und $\vec{z}^{(3,0)}$ oder durch Linearkombinationen der Polynome $\vec{z}^{(1,2)}$ und $\vec{z}^{(0,3)}$. Exemplarisch wird dazu der erste Fall betrachtet. Die Multiplikation der zweiten Gleichung in (3.2) von rechts mit $\frac{1}{2} \mathbf{e}_1$ ergibt zunächst

$$\frac{1}{2} \partial_0 \vec{z}^{(2,1)} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} \vec{z}^{(2,0)} \mathbf{e}_3 + \vec{z}^{(1,1)}. \quad (3.3)$$

Demzufolge lässt sich $\vec{z}^{(1,1)}$ isolieren, indem ∂_0 auf $\frac{1}{2} \vec{z}^{(2,1)} \mathbf{e}_1$ angewendet wird. Um nun eine Primitive mit den geforderten Eigenschaften nach Definition 3.2 zu erhalten, muss aus der letzten Gleichung der noch verbleibende Term $\frac{1}{2} \vec{z}^{(2,0)} \mathbf{e}_3$ entfernt werden. Durch Multiplikation der ersten Gleichung aus (3.2) mit $\frac{1}{6} \mathbf{e}_2$ von rechts folgt

$$\frac{1}{6} \partial_0 \vec{z}^{(3,0)} \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{2} \vec{z}^{(2,0)} \mathbf{e}_3$$

und nach Kombination mit Gleichung (3.3)

$$\frac{1}{2} \partial_0 \vec{z}^{(2,1)} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{6} \partial_0 \vec{z}^{(3,0)} \mathbf{e}_2 = \vec{z}^{(1,1)}. \quad (3.4)$$

Die Anwendung der Primitiven $\mathcal{P}_{\vec{z},0}$ auf die Gleichung (3.4) führt schließlich auf das gesuchte Resultat

$$\mathcal{P}_{\vec{z},0} \vec{z}^{(1,1)} = \frac{1}{2} \vec{z}^{(2,1)} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{6} \vec{z}^{(3,0)} \mathbf{e}_2.$$

Wie eingangs angedeutet, lässt sich eine $\mathcal{P}_{\vec{z},0}$ -Primitive zu $\vec{z}^{(1,1)}$ auch auf andere Weise durch Linearkombinationen der Polynome $\vec{z}^{(1,2)}$ und $\vec{z}^{(0,3)}$ erhalten. Analog erhält man in diesem Fall

$$\mathcal{P}_{\vec{z},0} \vec{z}^{(1,1)} = \frac{1}{2} \vec{z}^{(1,2)} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{6} \vec{z}^{(0,3)} \mathbf{e}_1.$$

Abschließend sei noch angemerkt, dass sich die zur Auflösung des Systems (3.2) notwendigen \mathbb{H} -wertigen Koeffizienten explizit in Abhängigkeit der Potenzen ν_1 und ν_2 angeben lassen.

Das anhand des Beispiels prinzipiell erläuterte Vorgehen lässt sich nun auch auf beliebige verallgemeinerte Potenzen \vec{z}^ν übertragen. Um eine symmetrische Konstruktion zu gewährleisten, welche also den Einfluss der Variablen \mathbf{z}_1 und \mathbf{z}_2 in gleichem Maße wichtet, werden nach obigem Vorgehen sowohl die $\mathcal{P}_{\vec{z},0}$ -Primitive bezüglich absteigender ν_2 -Potenz als auch die $\mathcal{P}_{\vec{z},0}$ -Primitive bezüglich absteigender ν_1 -Potenz konstruiert. Im ersten Fall erhält man nach längerer Rechnung

$$\mathcal{P}_{\vec{z},0}^a \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} = \frac{1}{\nu_1 + 1} \left[\vec{z}^{(\nu_1+1, \nu_2)} \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^{\nu_2} \vec{z}^{(\nu_1+1+i, \nu_2-i)} \prod_{j=1}^i \left(\frac{\nu_2 - i + j}{\nu_1 + 1 + j} \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{e}_1 \right]$$

und analog für den zweiten Fall

$$\mathcal{P}_{\vec{z},0}^b \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} = \frac{1}{\nu_2 + 1} \left[\vec{z}^{(\nu_1, \nu_2+1)} \mathbf{e}_2 + \sum_{l=1}^{\nu_1} \vec{z}^{(\nu_1-l, \nu_2+1+l)} \mathbf{e}_2 \prod_{m=1}^l \left(\frac{\nu_1 - l + m}{\nu_2 + 1 + m} \mathbf{e}_3 \right) \right],$$

woraus sich die symmetrische Darstellung zu

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\vec{z},0} \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{P}_{\vec{z},0}^a \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} + \mathcal{P}_{\vec{z},0}^b \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\nu_1 + 1} \vec{z}^{(\nu_1+1, \nu_2)} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\nu_2 + 1} \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2+1)} \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{\nu_1 + 1} \sum_{i=1}^{\nu_2} \vec{z}^{(\nu_1+1+i, \nu_2-i)} \prod_{j=1}^i \left(\frac{\nu_2 - i + j}{\nu_1 + 1 + j} \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad \left. + \frac{1}{\nu_2 + 1} \sum_{l=1}^{\nu_1} \vec{z}^{(\nu_1-l, \nu_2+1+l)} \mathbf{e}_2 \prod_{m=1}^l \left(\frac{\nu_1 - l + m}{\nu_2 + 1 + m} \mathbf{e}_3 \right) \right] \quad (3.5) \end{aligned}$$

ergibt. Unter Verwendung der Identitäten

$$(\nu_1 + 1) \prod_{j=1}^i (\nu_1 + 1 + j) = \frac{(\nu_1 + 1 + i)!}{\nu_1!} \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^i (\nu_2 - i + j) = \frac{\nu_2!}{(\nu_2 - i)!}$$

lässt sich Gleichung (3.5) schließlich auf die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\vec{z},0} \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^{\nu_2} \vec{z}^{(\nu_1+1+i, \nu_2-i)} \frac{\nu_1! \nu_2!}{(\nu_1 + 1 + i)! (\nu_2 - i)!} \mathbf{e}_3^i \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{\nu_1} \vec{z}^{(\nu_1-l, \nu_2+1+l)} \frac{\nu_1! \nu_2!}{(\nu_1 - l)! (\nu_2 + 1 + l)!} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^l \right] \end{aligned}$$

bringen. Die auf der Menge der verallgemeinerten Potenzen $H_\nu^k(\vec{z})$, $k \in \mathbb{N}_0$ definierten Primitiven können zusammenfassend wie folgt angegeben werden.

Theorem 3.5. *Durch die Beziehungen*

$$\mathcal{P}_{\vec{z},0} \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} = \frac{\nu_1! \nu_2!}{2} \left[\sum_{i=0}^{\nu_2} \vec{z}^{(\nu_1+1+i, \nu_2-i)} \frac{\mathbf{e}_3^i \mathbf{e}_1}{(\nu_1+1+i)!(\nu_2-i)!} + \sum_{l=0}^{\nu_1} \vec{z}^{(\nu_1-l, \nu_2+1+l)} \frac{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^l}{(\nu_1-l)!(\nu_2+1+l)!} \right],$$

$$\mathcal{P}_{\vec{z},1} \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} = \frac{1}{\nu_1+1} \vec{z}^{(\nu_1+1, \nu_2)} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_{\vec{z},2} \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2)} = \frac{1}{\nu_2+1} \vec{z}^{(\nu_1, \nu_2+1)}$$

werden für eine beliebige verallgemeinerte Potenz $H_\nu^k(\vec{z}) := \vec{z}^\nu$, $k \in \mathbb{N}_0$ monogene Primitive $\mathcal{P}_{\vec{z},i} \vec{z}^\nu$, $i = 0, 1, 2$ im Sinne von Definition 3.2 erklärt.

Anhand der Abbildung 3.1 werden für das System der verallgemeinerten Potenzen noch einmal die strukturellen Eigenschaften sowie die erhaltenen Abbildungseigenschaften der Differential- und Primitivierungsoperatoren veranschaulicht. Wie be-

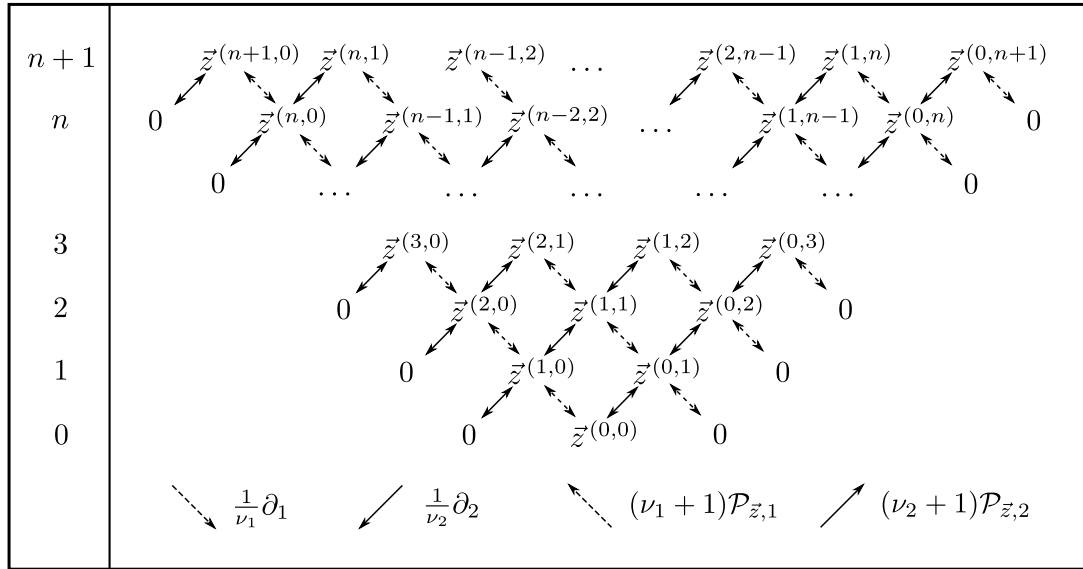


Abbildung 3.1: Das linear unabhängige System der verallgemeinerten Potenzen.

reits eingangs erwähnt, ist die Taylorreihe auch im Höherdimensionalen ein wichtiges funktionentheoretisches Hilfsmittel, um insbesondere lokale Aussagen über Eigenschaften der Funktion durch verallgemeinerte Potenzreihendarstellungen zu gewinnen. Die verallgemeinerten Potenzen stellen dafür ein geeignetes Funktionensystem dar. Verwendet man zur Beschreibung der partiellen Ableitung die Darstellung (2.18)

mit Hilfe der eingeführten Differentialoperatoren (2.17), so lässt sich anhand der Abbildung 3.1 erkennen, dass für eine beliebige verallgemeinerte Potenz $\bar{z}^{(\nu_1, \nu_2)}(\mathbf{x})$ die differentiellen Beziehungen

$$\partial_1^i \partial_2^j \bar{z}^{(\nu_1, \nu_2)}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \bar{z}^{(\nu_1, \nu_2)}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \begin{cases} \nu_1! \nu_2! & : i = \nu_1, j = \nu_2, \\ 0 & : i \neq \nu_1, j \neq \nu_2 \end{cases}$$

gelten. Aufgrund dieser Eigenschaft lässt sich die partielle Ableitung $\partial_1^{\nu_1} \partial_2^{\nu_2} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$ einer monogenen Funktion $f(\mathbf{x})$ eindeutig mit der verallgemeinerten Potenz $\bar{z}^{(\nu_1, \nu_2)}$ in Beziehung setzen und folglich eine lokal konvergente Taylorreihenentwicklung (cf. [Fueter 1935, Brackx et al. 1982, Malonek 1987; 1990]) bezüglich dieser Basis angeben.

Definition 3.3 (Taylorreihe in \mathbb{H}). Es sei $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ eine monogene Funktion. Die Taylorreihe auf der Grundlage der verallgemeinerten Potenzen $H_\nu^k(\bar{z}) := \bar{z}^{(\nu_1, \nu_2)}$ ist definiert durch

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\nu|} H_\nu^k(\bar{z}) \mathbf{a}_\nu, \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_\nu = \frac{1}{\nu!} \partial_1^{\nu_1} \partial_2^{\nu_2} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}. \quad (3.6)$$

Abschließend werden noch einige wesentliche Eigenschaften der Taylorreihe (3.6) herausgestellt. Zuerst ist zu erwähnen, dass das System der verallgemeinerten Potenzen kein Orthonormalsystem ist, wie beispielsweise in [Cação 2004] für das Gebiet der Einheitskugel gezeigt wurde. Demzufolge sind die Taylorreihe (3.6) wie auch deren formale hyperkomplexe Ableitung keine Orthogonalreihen. Der Versuch, die für eine beliebige verallgemeinerte Potenz $\bar{z}^{(\nu_1, \nu_2)}$ erhaltenen expliziten Darstellungsformeln für die hyperkomplexe Ableitung (q.v. Theorem 3.4) und die $\mathcal{P}_{\bar{z},0}$ -Primitive (q.v. Theorem 3.5) durch gliedweise Anwendung auf die Reihendarstellung (3.6) zu übertragen, führt daher auf beträchtliche mathematische Schwierigkeiten. Theoretische Aussagen zu den Konvergenzeigenschaften dieser Reihen lassen sich im Allgemeinen nur für einige Sonderfälle beweisen.

Außerdem sei bemerkt, dass die Taylorreihe bezüglich der verallgemeinerten Potenzen (3.6) im Vergleich zum komplexen Fall keinen direkten Bezug zur hyperkomplexen Ableitung ∂_0 besitzt, sondern hier vielmehr die partiellen Ableitungen nach y, z auftreten. Dies lässt sich dadurch erklären, dass für eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ für einen festen Grad n genau $n + 1$ linear unabhängige monogene Polynome existieren und dafür gerade $n + 1$ verschiedene partielle Ableitungen $\partial_1^i \partial_2^j$ zur Ordnung

$n = i + j$ bereit stehen. Dass die Definition einer Taylorreihe in \mathbb{H} , welche neben einem direkten Bezug zur hyperkomplexen Ableitung ferner die Eigenschaft einer Orthogonalreihe besitzt, trotzdem möglich ist, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

3.2 Orthogonalreihenentwicklungen monogener Kugelfunktionen

Der Hauptteil dieses Kapitels widmet sich nun einem anderen konstruktiven Zugang zu monogenen Potenzreihen, deren Ansatzfunktionen aus harmonischen Kugelfunktionen erzeugt werden. Theoretische Grundlage ist dabei die Faktorisierung des Laplace-Operators. Wie bereits eingangs erwähnt, wurden in [Cação 2004] unter Verwendung dieser Konstruktionsidee vollständige Orthonormalsysteme monogener Kugelfunktionen konstruiert und der Zusammenhang zur hyperkomplexen Ableitung und zu Primitiven hergestellt. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit konstruierten und im Folgenden ausführlich hergeleiteten Funktionensysteme nutzen zwar die in [Cação 2004] explizit angegebenen Ausgangssysteme der harmonischen und monogenen Kugelfunktionen, werden aber durch einen anderen Orthonormierungsansatz erhalten, wodurch sich diese sehr wesentlich sowohl in den strukturellen als auch in den funktionentheoretischen Eigenschaften von den Systemen in [Cação 2004] unterscheiden. Auf diese Unterschiede wird an entsprechender Stelle jedoch gesondert eingegangen werden. Außerdem werden aus Gründen der Zugänglichkeit vornehmlich die Quellen [Cação et al. 2004; 2006, Cação & Gürlebeck 2006] referenziert, die aber im Wesentlichen aus der Dissertation [Cação 2004] hervorgegangen sind.

Zu Beginn sollen die theoretischen Grundlagen der harmonischen und monogenen Ansatzsysteme erläutert werden. Wie im Folgenden noch deutlich wird, ist es dabei zweckmäßiger, in Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi$$

zu arbeiten, mit $0 < r < \infty$, $0 < \theta \leq \pi$, $0 < \varphi \leq 2\pi$. Jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ besitzt dann die eindeutige Darstellung

$$\mathbf{x} = r\boldsymbol{\omega}, \quad |\mathbf{x}| = r, \quad |\boldsymbol{\omega}| = 1.$$

Um auch differentielle Eigenschaften der betrachteten Systeme studieren zu können, sind auch die Differentialoperatoren (2.17) zu transformieren. In Kugelkoordinaten

ergibt sich für die Operatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ die Darstellung

$$\partial_i = \frac{1}{2} \left(\bar{\omega} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \bar{L} \right) \mathbf{e}_i, \quad (3.7)$$

wobei

$$\bar{L} = (-\sin \theta - \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Des Weiteren beschränken sich die Betrachtungen auf das Gebiet der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 , $\Omega := \mathbb{B}_3 := \mathbb{B}_3(0, 1)$. In diesem Zusammenhang wird insbesondere durch $d\sigma$ ein Flächenelement der zugehörigen Einheitssphäre $S^2 := \partial \mathbb{B}_3$ bezeichnet. Wie in [Sansone 1959] näher ausgeführt, lässt sich jedes homogene harmonische Polynom $P_n(\mathbf{x})$ vom Grad n in Kugelkoordinaten durch

$$P_n(\mathbf{x}) = r^n P_n(\omega), \quad \omega \in S^2$$

darstellen. Die Einschränkung $P_n(\omega)$ auf die Einheitssphäre wird als *harmonische Kugelfunktion* bezeichnet. Betrachtet man den Raum $\mathcal{H}_n(S^2)$ aller \mathbb{R} -wertigen harmonischen Kugelfunktionen vom Grad n , so ist bekanntermaßen $\dim \mathcal{H}_n(S^2) = 2n + 1$ (q.v. [Axler et al. 1992, Müller 1966]). In diesem Zusammenhang sei auch auf die wichtige Eigenschaft zwischen den Räumen $\mathcal{H}_n(S^2)$ und $\mathcal{H}_m(S^2)$ hingewiesen, welche für $n \neq m$ bereits orthogonal in $L^2(S^2; \mathbb{R})$ sind (q.v. [Sansone 1959]). In Analogie zur begrifflichen Definition der harmonischen Funktionen bezeichnet man jedes homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynom mit $H_n(\mathbf{x})$ und dessen Einschränkung auf S^2 als *\mathbb{H} -holomorphe Kugelfunktion* $H_n(\omega)$. Weiterhin sei durch $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; K)$ der Unterraum aller homogenen monogenen Polynome vom Grad n in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; K) \cap \ker \bar{\partial}$ definiert, welcher sich in Abhängigkeit der Raumstruktur als \mathbb{R} -linearer ($K = \mathbb{R}$) oder \mathbb{H} -linearer Hilbert-Raum ($K = \mathbb{H}$) betrachten lässt. In [Cação 2004] wurde bewiesen, dass $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R}) = 4n + 4$, wo hingegen bereits in [Sudbery 1979] für den \mathbb{H} -linearen Fall gezeigt wurde, dass $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{H}) = n + 1$. Aus der Tatsache, dass die einzelnen Koordinaten der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Kugelfunktionen wiederum als Linearkombinationen von homogenen harmonischen Kugelfunktionen dargestellt werden können, folgt damit auch für $n \neq m$ die Orthogonalität der Räume $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; K)$ und $\mathcal{M}_m(\mathbb{H}; K)$, mit $K = \mathbb{R}, \mathbb{H}$.

3.2.1 Ein System harmonischer Kugelfunktionen

Der Ansatz zur Konstruktion der monogenen Basis beruht auf dem bekannten vollständigen Orthogonalsystem harmonischer Kugelfunktionen (q.v. [Sansone 1959])

$$\left. \begin{aligned} U_{n+1}^0(\theta, \varphi) &= P_{n+1}(\cos \theta), \\ U_{n+1}^m(\theta, \varphi) &= P_{n+1}^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \\ V_{n+1}^m(\theta, \varphi) &= P_{n+1}^m(\cos \theta) \sin m\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $m = 1, \dots, n+1$. Dabei bezeichnet P_{n+1} das *Legendre-Polynom* vom Grad $n+1$, gegeben durch

$$P_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} a_{n+1,k} t^{n+1-2k}, \quad P_0(t) = 1, \quad t \in [-1, 1],$$

mit

$$a_{n+1,k} = (-1)^k \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(2n+2-2k)!}{k!(n+1-k)!(n+1-2k)!}.$$

Die Funktionen P_{n+1}^m in (3.8) sind die *assoziierten Legendre-Funktionen*, welche mit den Legendre-Polynomen durch die Beziehung

$$P_{n+1}^m(t) := (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_{n+1}(t), \quad m = 1, \dots, n+1$$

verknüpft sind. Die Funktionensysteme der Legendre-Polynome und der assoziierten Legendre-Funktionen sind ferner als Lösungen der *allgemeinen Legendreschen Differentialgleichung*

$$(1-t^2)(P_{n+1}^m(t))'' - 2t(P_{n+1}^m(t))' + \left((n+1)(n+2) - m^2 \frac{1}{1-t^2} \right) P_{n+1}^m(t) = 0$$

definiert, wobei $m = 0, \dots, n+1$. Im Fall $m = 0$ reduziert sich diese auf die *Legendresche Differentialgleichung* und die assoziierte Legendre-Funktion $P_{n+1}^0(t)$ stimmt mit dem entsprechenden Legendre-Polynom $P_{n+1}(t)$ überein. Wie in [Andrews 1998] angegeben, erfüllen die Legendre-Polynome sowie die assoziierten Legendre-Funktionen außerdem zahlreiche Rekursionsformeln. Im Rahmen dieser Arbeit werden im Speziellen die Beziehungen

$$(1-t^2)(P_{n+1}^m(t))' = (n+m+1)P_n^m(t) - (n+1)tP_{n+1}^m(t), \quad (3.9)$$

$$(1-t^2)^{1/2}(P_{n+1}^m(t))' = P_{n+1}^{m+1}(t) - m(1-t^2)^{-1/2}tP_{n+1}^m(t), \quad (3.10)$$

$$(1-t^2)^{1/2}P_{n+1}^m(t) = \frac{1}{2n+3} (P_{n+2}^{m+1}(t) - P_n^{m+1}(t)) \quad (3.11)$$

sowie die Zweischrittformel

$$(n - m + 1)P_{n+1}^m(t) - (2n + 1)tP_n^m(t) + (n + m)P_{n-1}^m(t) = 0 \quad (3.12)$$

benötigt, wobei $m = 0, \dots, n + 1$. Für detailliertere und weiterführende Betrachtungen der Legendre-Polynome und der assoziierten Legendre-Funktionen sei beispielsweise auf [Andrews 1998] und [Sansone 1959] verwiesen.

3.2.2 Ein System monogener Kugelfunktionen

In [Cação 2004] wurde auf der Grundlage des Systems der harmonischen Kugelfunktionen (3.8) ein System monogener Kugelfunktionen konstruiert. Dieser Abschnitt fasst die wichtigsten Konstruktionsschritte aus dieser Arbeit zusammen und stellt die für die nächsten Abschnitte benötigten Formeln bereit.

Dazu werden zunächst die Erweiterungen der harmonischen Kugelfunktionen (3.8) in die Einheitskugel

$$\left\{ r^{n+1} U_{n+1}^0, r^{n+1} U_{n+1}^m, r^{n+1} V_{n+1}^m, m = 1, \dots, n + 1 \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \quad (3.13)$$

betrachtet. Die Anwendung des nach (3.7) transformierten Differentialoperators ∂_0 auf das System der homogenen harmonischen Polynome (3.13) liefert ein System von homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynomen

$$\left\{ r^n X_n^0, r^n X_n^m, r^n Y_n^m, m = 1, \dots, n + 1 \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (3.14)$$

Schränkt man diese Funktionen erneut auf die Einheitssphäre S^2 ein, so ergeben sich für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ genau $2n + 3$ \mathbb{H} -holomorphe Kugelfunktionen

$$X_n^0, X_n^m, Y_n^m, m = 1, \dots, n + 1.$$

Wie in [Cação 2004] gezeigt wurde, lassen sich für diese sphärischen Funktionen explizite Darstellungsformeln in Kugelkoordinaten angeben. Die Funktion X_n^0 ist dabei durch

$$\begin{aligned} X_n^0 &:= \partial_0 [r^{n+1} U_{n+1}^0] \Big|_{r=1} \\ &= \mathbf{A}^{0,n} + \mathbf{B}^{0,n} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \mathbf{B}^{0,n} \sin \varphi \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

gegeben, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{0,n} &:= \frac{1}{2} \left(\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}(t)]_{t=\cos \theta} + (n + 1) \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta) \right), \\ \mathbf{B}^{0,n} &:= \frac{1}{2} \left(\sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}(t)]_{t=\cos \theta} - (n + 1) \sin \theta P_{n+1}(\cos \theta) \right). \end{aligned}$$

Die monogenen Kugelfunktionen X_n^m und Y_n^m erhält man hingegen durch

$$\begin{aligned}
X_n^m &:= \partial_0 [r^{n+1} U_{n+1}^m] \Big|_{r=1} \\
&= \mathbf{A}^{m,n} \cos m\varphi \\
&\quad + (\mathbf{B}^{m,n} \cos \varphi \cos m\varphi - \mathbf{C}^{m,n} \sin \varphi \sin m\varphi) \mathbf{e}_1 \\
&\quad + (\mathbf{B}^{m,n} \sin \varphi \cos m\varphi + \mathbf{C}^{m,n} \cos \varphi \sin m\varphi) \mathbf{e}_2,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
Y_n^m &:= \partial_0 [r^{n+1} V_{n+1}^m] \Big|_{r=1} \\
&= \mathbf{A}^{m,n} \sin m\varphi \\
&\quad + (\mathbf{B}^{m,n} \cos \varphi \sin m\varphi + \mathbf{C}^{m,n} \sin \varphi \cos m\varphi) \mathbf{e}_1 \\
&\quad + (\mathbf{B}^{m,n} \sin \varphi \sin m\varphi - \mathbf{C}^{m,n} \cos \varphi \cos m\varphi) \mathbf{e}_2,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

mit den Koeffizientenfunktionen

$$\mathbf{A}^{m,n} := \frac{1}{2} \left(\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} + (n+1) \cos \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) \right), \tag{3.18}$$

$$\mathbf{B}^{m,n} := \frac{1}{2} \left(\sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} - (n+1) \sin \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) \right), \tag{3.19}$$

$$\mathbf{C}^{m,n} := \frac{1}{2} m \frac{1}{\sin \theta} P_{n+1}^m(\cos \theta). \tag{3.20}$$

3.2.3 Differentielle Eigenschaften der Systeme homogener Polynome

Vor dem praktischen Hintergrund der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln wird nun die Anwendung der transformierten Differentialoperatoren (3.7) auf das System der homogenen harmonischen Polynome (3.13) sowie auf das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome (3.14) studiert. Nach Möglichkeit sollen die gesuchten differentiellen Beziehungen in expliziter Form erhalten werden, was natürlich sehr umfangreiche Berechnungen zur Folge hat. Wie sich jedoch später zeigen wird, bilden diese strukturellen Eigenschaften der Systeme die theoretische Grundlage für die Konstruktion der Orthonormalsysteme und die daraus abgeleiteten Anwendungen. Es sei an dieser Stelle noch einmal deutlich herausgestellt, dass sich die nachfolgenden Betrachtungen zwar auf die gleichen Ansatzfunktionen wie in den Arbeiten [Cação 2004, Cação et al. 2004] beziehen, jedoch nicht als einfache Schlussfolgerungen dieser Resultate erhalten werden können. Wesentlich ist hierbei, dass die Abbildungseigenschaften der betrachteten Systeme nun unter verschiedenen

Differentialoperatoren betrachtet werden und insbesondere auch \mathbb{H} -wertige Koeffizienten zugelassen werden.

Um dabei die Rechnungen möglichst leserlich zu halten, werden im Folgenden die Bezeichnungen

$$X_{n,j}^{0,\dagger} := r^n X_n^0 \mathbf{e}_j, \quad X_{n,j}^{m,\dagger} := r^n X_n^m \mathbf{e}_j, \quad Y_{n,j}^{m,\dagger} := r^n Y_n^m \mathbf{e}_j,$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $m = 1, \dots, n+1$ und $j = 0, 1, 2, 3$, verwendet.

Lemma 3.1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ erhält man nach Anwendung der in (3.7) definierten sphärischen Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ auf das System der homogenen harmonischen Polynome (3.13) die Relationen*

$$\partial_i(r^{n+1}U_{n+1}^0) = X_{n,i}^{0,\dagger} = \frac{1}{n+2} \left(X_{n,1}^{1,\dagger} + Y_{n,2}^{1,\dagger} \right) \mathbf{e}_i, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_i(r^{n+1}U_{n+1}^m) = X_{n,i}^{m,\dagger} = & -\frac{n+m+1}{2} \left(X_{n,1}^{m-1,\dagger} - Y_{n,2}^{m-1,\dagger} \right) \mathbf{e}_i \\ & + \frac{1}{2(n+m+2)} \left(X_{n,1}^{m+1,\dagger} + Y_{n,2}^{m+1,\dagger} \right) \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_i(r^{n+1}V_{n+1}^m) = Y_{n,i}^{m,\dagger} = & -\frac{n+m+1}{2} \left(Y_{n,1}^{m-1,\dagger} + X_{n,2}^{m-1,\dagger} \right) \mathbf{e}_i \\ & + \frac{1}{2(n+m+2)} \left(Y_{n,1}^{m+1,\dagger} - X_{n,2}^{m+1,\dagger} \right) \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit $m = 1, \dots, n+1$. Für eine kompakte Darstellung der Beziehungen (3.21)-(3.23) wurden außerdem die Konventionen $X_{n,i}^{k,\dagger} := 0 \Leftrightarrow k < 0 \vee k > n+1$ und $Y_{n,i}^{l,\dagger} := 0 \Leftrightarrow l < 1 \vee l > n+1$ getroffen.

Beweis. Vorab sei bemerkt, dass die Gleichungen auf der linken Seite in (3.21)-(3.23) bereits in [Cação 2004] bewiesen wurden. Die neuen Resultate und damit auch der Beweis beziehen sich daher auf die Darstellungen auf der rechten Seite.

Der Einfachheit halber werden die Gleichungen (3.21)-(3.23) zunächst von rechts mit $\pm \mathbf{e}_i$ multipliziert. Folglich ist im ersten Schritt für die Beziehung (3.21) zu zeigen, dass

$$X_{n,0}^{0,\dagger} \stackrel{!}{=} \frac{1}{n+2} \left(X_{n,1}^{1,\dagger} + Y_{n,2}^{1,\dagger} \right)$$

gilt. Unter Verwendung der Darstellungen (3.15), (3.16) und (3.17) erhält man

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}^{0,n} + \mathbf{B}^{0,n} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \mathbf{B}^{0,n} \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\
&= \frac{1}{n+2} \left[\left(\mathbf{A}^{1,n} \cos \varphi + (\mathbf{B}^{1,n} \cos \varphi \cos \varphi - \mathbf{C}^{1,n} \sin \varphi \sin \varphi) \mathbf{e}_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\mathbf{B}^{1,n} \sin \varphi \cos \varphi + \mathbf{C}^{1,n} \cos \varphi \sin \varphi) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathbf{A}^{1,n} \sin \varphi + (\mathbf{B}^{1,n} \cos \varphi \sin \varphi + \mathbf{C}^{1,n} \sin \varphi \cos \varphi) \mathbf{e}_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\mathbf{B}^{1,n} \sin \varphi \sin \varphi - \mathbf{C}^{1,n} \cos \varphi \cos \varphi) \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{e}_2 \right] \\
&= \frac{1}{n+2} \left[(\mathbf{C}^{1,n} - \mathbf{B}^{1,n}) + \mathbf{A}^{1,n} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}^{1,n} \sin \varphi \mathbf{e}_2 \right]
\end{aligned}$$

und schließlich

$$X_{n,0}^{0,\dagger} = \frac{1}{n+2} (X_{n,1}^{1,\dagger} + Y_{n,2}^{1,\dagger}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(I)} & \mathbf{A}^{0,n} = \frac{1}{n+2} (\mathbf{C}^{1,n} - \mathbf{B}^{1,n}), \\ \text{(II)} & \mathbf{B}^{0,n} = \frac{1}{n+2} \mathbf{A}^{1,n}. \end{cases}$$

Analog ist nun für die Beziehung (3.22) zu zeigen, dass

$$X_{n,0}^{m,\dagger} \stackrel{!}{=} -\frac{n+m+1}{2} (X_{n,1}^{m-1,\dagger} - Y_{n,2}^{m-1,\dagger}) + \frac{1}{2(n+m+2)} (X_{n,1}^{m+1,\dagger} + Y_{n,2}^{m+1,\dagger}).$$

Mit (3.16) und (3.17) berechnet man

$$\begin{aligned}
X_{n,0}^m &= \frac{n+m+1}{2} \left[-\mathbf{A}^{m-1,n} \cos(m-1)\varphi \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}^{m-1,n} \sin(m-1)\varphi \mathbf{e}_2 \right. \\
&\quad + (\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}) (\cos \varphi \cos(m-1)\varphi - \sin \varphi \sin(m-1)\varphi) \\
&\quad \left. + (\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}) (\sin \varphi \cos(m-1)\varphi + \cos \varphi \sin(m-1)\varphi) \mathbf{e}_3 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2(n+m+2)} \left[\mathbf{A}^{m+1,n} \cos(m+1)\varphi \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}^{m+1,n} \sin(m+1)\varphi \mathbf{e}_2 \right. \\
&\quad + (\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}) (\cos \varphi \cos(m+1)\varphi + \sin \varphi \sin(m+1)\varphi) \\
&\quad \left. + (\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}) (\sin \varphi \cos(m+1)\varphi - \cos \varphi \sin(m+1)\varphi) \mathbf{e}_3 \right] \\
&= \frac{n+m+1}{2} \left[(\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}) (\cos m\varphi + \sin m\varphi \mathbf{e}_3) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{A}^{m-1,n} (\cos(m-1)\varphi \mathbf{e}_1 - \sin(m-1)\varphi \mathbf{e}_2) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2(n+m+2)} \left[(\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}) (\cos m\varphi - \sin m\varphi \mathbf{e}_3) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{A}^{m+1,n} (\cos(m+1)\varphi \mathbf{e}_1 + \sin(m+1)\varphi \mathbf{e}_2) \right]
\end{aligned}$$

und erhält wegen (3.16) eine zum Ausgangsproblem äquivalente Formulierung

$$\begin{aligned}
X_{n,0}^{m,\dagger} &\stackrel{!}{=} -\frac{n+m+1}{2} \left(X_{n,1}^{m-1,\dagger} - Y_{n,2}^{m-1,\dagger} \right) + \frac{1}{2(n+m+2)} \left(X_{n,1}^{m+1,\dagger} + Y_{n,2}^{m+1,\dagger} \right) \\
\Leftrightarrow &\left\{ \begin{array}{l} \text{(III)} \quad \mathbf{A}^{m,n} = \frac{n+m+1}{2} (\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}) + \frac{1}{2(n+m+2)} (\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}), \\ \text{(IV)} \quad \mathbf{B}^{m,n} \cos \varphi \cos m\varphi - \mathbf{C}^{m,n} \sin \varphi \sin m\varphi \\ \quad = -\frac{n+m+1}{2} \mathbf{A}^{m-1,n} \cos(m-1)\varphi + \frac{1}{2(n+m+2)} \mathbf{A}^{m+1,n} \cos(m+1)\varphi, \\ \text{(V)} \quad \mathbf{B}^{m,n} \sin \varphi \cos m\varphi + \mathbf{C}^{m,n} \cos \varphi \sin m\varphi \\ \quad = \frac{n+m+1}{2} \mathbf{A}^{m-1,n} \sin(m-1)\varphi + \frac{1}{2(n+m+2)} \mathbf{A}^{m+1,n} \sin(m+1)\varphi, \\ \text{(VI)} \quad 0 = \frac{n+m+1}{2} (\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}) - \frac{1}{2(n+m+2)} (\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}). \end{array} \right.
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise führt die Auswertung der Beziehung (3.23) auf ein dazu gleichwertiges System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
Y_{n,0}^{m,\dagger} &\stackrel{!}{=} -\frac{n+m+1}{2} \left(Y_{n,1}^{m-1,\dagger} + X_{n,2}^{m-1,\dagger} \right) + \frac{1}{2(n+m+2)} \left(Y_{n,1}^{m+1,\dagger} - X_{n,2}^{m+1,\dagger} \right) \\
\Leftrightarrow &\left\{ \begin{array}{l} \text{(VII)} \quad \mathbf{A}^{m,n} = \frac{n+m+1}{2} (\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}) + \frac{1}{2(n+m+2)} (\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}), \\ \text{(VIII)} \quad \mathbf{B}^{m,n} \cos \varphi \sin m\varphi + \mathbf{C}^{m,n} \sin \varphi \cos m\varphi \\ \quad = -\frac{n+m+1}{2} \mathbf{A}^{m-1,n} \sin(m-1)\varphi + \frac{1}{2(n+m+2)} \mathbf{A}^{m+1,n} \sin(m+1)\varphi, \\ \text{(IX)} \quad \mathbf{B}^{m,n} \sin \varphi \sin m\varphi - \mathbf{C}^{m,n} \cos \varphi \cos m\varphi \\ \quad = -\frac{n+m+1}{2} \mathbf{A}^{m-1,n} \cos(m-1)\varphi - \frac{1}{2(n+m+2)} \mathbf{A}^{m+1,n} \cos(m+1)\varphi, \\ \text{(X)} \quad 0 = \frac{n+m+1}{2} (\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}) - \frac{1}{2(n+m+2)} (\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}). \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden die Beziehungen (I)-(X) schrittweise ausgewertet. Aus der Kombination der Gleichungen (III) und (VI) oder gleichermaßen (VII) und (X) folgt direkt

$$\mathbf{A}^{m,n} = \frac{1}{n+m+2} (\mathbf{C}^{m+1,n} - \mathbf{B}^{m+1,n}) \quad (3.24)$$

und

$$\mathbf{A}^{m,n} = (n+m+1) (\mathbf{B}^{m-1,n} + \mathbf{C}^{m-1,n}). \quad (3.25)$$

Betrachtet man im Weiteren die Summe der Relationen (IV) und (IX), so ergibt sich

$$(\mathbf{B}^{m,n} - \mathbf{C}^{m,n}) = -(n + m + 1)\mathbf{A}^{m-1,n}$$

und damit erneut Gleichung (3.24). Die Addition der Beziehungen (v) und (VIII) führt dann auf

$$(\mathbf{B}^{m,n} + \mathbf{C}^{m,n}) = \frac{1}{n + m + 2}\mathbf{A}^{m+1,n},$$

welche hingegen äquivalent zur Gleichung (3.25) ist. Schließlich erkennt man leicht, dass auch die Relationen (I) bzw. (II) wiederum auf Sonderfälle der Gleichungen (3.24) bzw. (3.25) führen. Zusammenfassend lässt sich daher feststellen, dass für den Nachweis der Behauptungen (3.21), (3.22) und (3.23) entsprechend die Beziehungen (3.24) und (3.25) zu zeigen sind.

Begonnen wird mit (3.24). Eine explizite Auswertung der Funktionen (3.18), (3.19) und (3.20) in (3.24) liefert

$$\begin{aligned} & \frac{n + m + 2}{2} \left(\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} + (n + 1) \cos \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) \right) \\ &= \frac{1}{2} (m + 1) \frac{1}{\sin \theta} P_{n+1}^{m+1}(\cos \theta) - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^{m+1}(t)]_{t=\cos \theta} \\ & \quad + \frac{n + 1}{2} \sin \theta P_{n+1}^{m+1}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Nach Substitution mit $t = \cos \theta$ ($\theta \in [0, \pi)$) vereinfacht sich diese zu

$$\begin{aligned} & (n + m + 2) \left((1 - t^2) (P_{n+1}^m(t))' + (n + 1)t P_{n+1}^m(t) \right) \\ &= \sqrt{1 - t^2} \left[\frac{m + 1}{1 - t^2} P_{n+1}^{m+1}(t) - t (P_{n+1}^{m+1}(t))' + (n + 1)P_{n+1}^{m+1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Auf beide Seiten der Gleichung (3.26) wird nun die Rekursionsformel (3.9) angewendet, was auf die Darstellung

$$(n + m + 1)\sqrt{1 - t^2} P_n^m(t) = P_{n+1}^{m+1}(t) - t P_n^{m+1}(t)$$

führt. Substituiert man schließlich in dieser letzten Gleichung die Rekursionsformel (3.11) in der Form

$$\sqrt{1 - t^2} P_n^m(t) = \frac{1}{2n + 1} (P_{n+1}^{m+1}(t) - P_{n-1}^{m+1}(t))$$

sowie die Zweischrittformel (3.12) in der Form

$$P_{n-1}^{m+1}(t) = \frac{2n + 1}{n + m + 1} t P_n^{m+1}(t) - \frac{n - m}{n + m + 1} P_{n+1}^{m+1}(t),$$

so folgert man leicht

$$\begin{aligned}\sqrt{1-t^2} P_n^m(t) &= \frac{1}{2n+1} \left(P_{n+1}^{m+1}(t) - \frac{2n+1}{n+m+1} t P_n^{m+1}(t) + \frac{n-m}{n+m+1} P_{n+1}^{m+1}(t) \right) \\ &= \frac{1}{n+m+1} \left(P_{n+1}^{m+1}(t) - t P_n^{m+1}(t) \right),\end{aligned}$$

wodurch die erste Bedingung (3.24) bewiesen wäre. Für den Beweis der zweiten Bedingung (3.25) wird der gleiche Beweisansatz verwendet. Die Auswertung der Funktionen (3.18), (3.19) und (3.20) in (3.25) liefert zunächst

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \left(\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} + (n+1) \cos \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) \right) \\ &= \frac{n+m+1}{2} \left[\sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^{m-1}(t)]_{t=\cos \theta} - (n+1) \sin \theta P_{n+1}^{m-1}(\cos \theta) \right. \\ & \quad \left. + (m-1) \frac{1}{\sin \theta} P_{n+1}^{m-1}(\cos \theta) \right],\end{aligned}$$

was sich ferner nach Substitution mit $t = \cos \theta$ zu

$$\begin{aligned}& (1-t^2) (P_{n+1}^m(t))' + (n+1)t P_{n+1}^m(t) \\ &= (n+m+1) \left[\sqrt{1-t^2} t (P_{n+1}^{m-1}(t))' - (n+1) \sqrt{1-t^2} P_{n+1}^{m-1}(t) \right. \\ & \quad \left. + (m-1) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P_{n+1}^{m-1}(t) \right]\end{aligned} \quad (3.27)$$

vereinfachen lässt. Wendet man nun zum einen die Rekursionsformel (3.9) auf die linke Seite und zum anderen die Rekursionsformel (3.10) in der Form

$$\sqrt{1-t^2} (P_{n+1}^{m-1}(t))' = P_{n+1}^m(t) - (m-1) (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^{m-1}(t)$$

auf die rechte Seite von Gleichung (3.27) an, so ergibt sich

$$P_n^m(t) = t P_{n+1}^m(t) - (n-m+2) \sqrt{1-t^2} P_{n+1}^{m-1}(t). \quad (3.28)$$

Für den letzten Term in (3.28) gewinnt man dann aus (3.11) die Beziehung

$$\sqrt{1-t^2} P_{n+1}^{m-1}(t) = \frac{1}{2n+3} (P_{n+2}^m(t) - P_n^m(t)),$$

wonach sich (3.28) auf die Darstellung

$$(n-m+2) P_{n+2}^m(t) - (2n+3) t P_{n+1}^m(t) + (n+m+1) P_n^m(t) = 0$$

bringen lässt. Für $n = n^* - 1$ ist diese jedoch äquivalent zur Zweischnittformel (3.12), wodurch nun auch Bedingung (3.25) vollständig bewiesen wäre. \square

Durch Kombination der Einzelresultate in Lemma 3.1 lässt sich nun eine für die folgenden Berechnungen sehr bedeutende Beziehung gewinnen.

Korollar 3.2. *Die Kombination der Beziehungen (3.22) und (3.23) führt auf die Darstellungsformel homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome*

$$(n + m + 2) \left(X_{n,0}^{m,\dagger} - Y_{n,3}^{m,\dagger} \right) = X_{n,1}^{m+1,\dagger} + Y_{n,2}^{m+1,\dagger}, \quad (3.29)$$

mit $m = 0, \dots, n+1$. Für die Sonderfälle $m = 0$ und $m = n+1$ sind die in Lemma 3.1 getroffenen Konventionen zu beachten.

Bemerkung 3.3. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass sich die Eigenschaften der Differentialoperatoren (2.17) bezüglich monogener Funktionen nicht ohne Weiteres auf harmonische Funktionen übertragen lassen. Im Speziellen bedeutet dies, dass im Gegensatz zu (2.19) die Differentialoperatoren bezüglich einer \mathbb{R} -wertigen harmonischen Funktion $h \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ durch die Beziehung

$$2\partial_0 h = -\mathbf{e}_1 \partial_1 h - \mathbf{e}_2 \partial_2 h$$

verknüpft sind.

Aus Lemma 3.1 lassen sich nun auch Darstellungsformeln für die Anwendung der Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ auf das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome (3.14) ableiten. Hierzu wird zunächst das bereits bekannte Resultat benötigt:

Lemma 3.2 ([Cação et al. 2006]). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $j = 0, 1, 2, 3$ gilt*

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 X_{n,j}^{m,\dagger} &= (n + m + 1) X_{n-1,j}^{m,\dagger}, \quad m = 0, \dots, n+1, \\ \partial_0 Y_{n,j}^{m,\dagger} &= (n + m + 1) Y_{n-1,j}^{m,\dagger}, \quad m = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Die Darstellungsformeln für das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome lauten dann wie folgt.

Lemma 3.3. *Durch Anwendung der sphärischen Differentialoperatoren (3.7) auf das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome (3.14) erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehungen*

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 X_{n,0}^{0,\dagger} &= X_{n-1,1}^{1,\dagger} + Y_{n-1,2}^{1,\dagger}, \\ \partial_1 X_{n,0}^{0,\dagger} &= -X_{n-1,0}^{1,\dagger}, \\ \partial_2 X_{n,0}^{0,\dagger} &= -Y_{n-1,0}^{1,\dagger}, \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 X_{n,0}^{m,\dagger} &= -\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) \left(X_{n-1,1}^{m-1,\dagger} - Y_{n-1,2}^{m-1,\dagger} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(X_{n-1,1}^{m+1,\dagger} + Y_{n-1,2}^{m+1,\dagger} \right), \\ \partial_1 X_{n,0}^{m,\dagger} &= \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) X_{n-1,0}^{m-1,\dagger} - \frac{1}{2} X_{n-1,0}^{m+1,\dagger}, \\ \partial_2 X_{n,0}^{m,\dagger} &= -\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) Y_{n-1,0}^{m-1,\dagger} - \frac{1}{2} Y_{n-1,0}^{m+1,\dagger} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 Y_{n,0}^{m,\dagger} &= -\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) \left(Y_{n-1,1}^{m-1,\dagger} + X_{n-1,2}^{m-1,\dagger} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(Y_{n-1,1}^{m+1,\dagger} - X_{n-1,2}^{m+1,\dagger} \right), \\ \partial_1 Y_{n,0}^{m,\dagger} &= \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) Y_{n-1,0}^{m-1,\dagger} - \frac{1}{2} Y_{n-1,0}^{m+1,\dagger}, \\ \partial_2 Y_{n,0}^{m,\dagger} &= \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) X_{n-1,0}^{m-1,\dagger} + \frac{1}{2} X_{n-1,0}^{m+1,\dagger} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

mit $m = 1, \dots, n+1$. Die in Lemma 3.1 getroffenen Konventionen in Bezug auf eine kompakte Darstellung der Resultate sind auch auf die Beziehungen (3.31)-(3.33) anzuwenden.

Beweis. Exemplarisch soll hier nur der Beweis der ersten Teilbehauptung (3.31) angegeben werden. Für die Teilbehauptungen (3.32) und (3.33) ist die Beweisidee vollkommen analog und kann daher leicht nachvollzogen werden.

Ausgehend von der Beziehung (3.21) erhält man nach Anwendung von ∂_0 und den Beziehungen (3.30) auf direktem Weg

$$\partial_0 X_{n,0}^{0,\dagger} = \frac{1}{n+2} \left(\partial_0 X_{n,1}^{1,\dagger} + \partial_0 Y_{n,2}^{1,\dagger} \right) = X_{n-1,1}^{1,\dagger} + Y_{n-1,2}^{1,\dagger}. \quad (3.34)$$

In Verallgemeinerung der Eigenschaft (2.19) der Differentialoperatoren bezüglich monogener Funktionen lässt sich insbesondere für den Sonderfall einer monogenen Funktion f aus $L^2(\Omega; \mathcal{A})$ zeigen, dass für diese auch

$$\partial_0 f = -(\partial_1 f) \mathbf{e}_1 - (\partial_2 f) \mathbf{e}_2 \quad (3.35)$$

gilt. Da bekanntermaßen das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome (3.14) in diesem Unterraum $L^2(\Omega; \mathcal{A})$ definiert ist, liefert ein Koeffizientenvergleich von (3.34) und (3.35) schließlich

$$\partial_1 X_{n,0}^{0,\dagger} = -X_{n-1,0}^{1,\dagger} \quad \text{und} \quad \partial_2 X_{n,0}^{0,\dagger} = -Y_{n-1,0}^{1,\dagger},$$

womit Behauptung (3.31) vollständig gezeigt wurde. \square

Neben den im Vorangegangenen betrachteten Abbildungseigenschaften der Systeme homogener Polynome bezüglich der Operatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ sollen abschließend noch einige nützliche, bereits bekannte Resultate angeführt werden, welche den jeweils referenzierten Arbeiten entnommen und auch dort detailliert bewiesen wurden. Für weiterführende Betrachtungen sei daher auf diese Quellen verwiesen.

Für die nächsten Abschnitte sind neben den differentiellen Beziehungen 1. Ordnung auch Aussagen über die hyperkomplexen Ableitungen höherer Ordnung von Interesse. Diesbezüglich lassen sich aus Lemma 3.2 folgende Resultate ableiten.

Lemma 3.4 ([Cação et al. 2006]). *Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ und $j = 0, 1, 2, 3$ ergibt die i -fache Anwendung der hyperkomplexen Ableitung ∂_0^i , $i = 1, \dots, n$*

$$\left. \begin{aligned} \partial_0^i X_{n,j}^{m,\dagger} &= \left[\prod_{h=1}^i (n+m+1-(h-1)) \right] X_{n-i,j}^{m,\dagger}, \quad m = 0, \dots, n+1-i, \\ \partial_0^i Y_{n,j}^{m,\dagger} &= \left[\prod_{h=1}^i (n+m+1-(h-1)) \right] Y_{n-i,j}^{m,\dagger}, \quad m = 1, \dots, n+1-i. \end{aligned} \right\}$$

Korollar 3.3 ([Cação et al. 2006]). *Für jedes feste $n \in \mathbb{N}_0$ und $j = 0, 1, 2, 3$ erhält man*

$$\left. \begin{aligned} \partial_0^i X_{n,j}^{0,\dagger} &= 0, \quad i \geq n+1, \\ \partial_0^i X_{n,j}^{m,\dagger} &= \partial_0^i Y_{n,j}^{m,\dagger} = 0, \quad i \geq n-m+2, \quad m = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \right\}$$

Aufgrund von Korollar 3.3 lässt sich ferner eine wichtige strukturelle Eigenschaft der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome (3.14) bezüglich ihrer i -fachen hyperkomplexen Ableitung zeigen.

Korollar 3.4 ([Gürlebeck et al. 2006]). *Für jedes feste $n \in \mathbb{N}_0$ und $j = 0, 1, 2, 3$ ergeben sich die Zugehörigkeiten*

$$\left. \begin{aligned} X_{n,j}^{0,\dagger} &\in (\ker \partial_0^{n+1} \setminus \ker \partial_0^n) \cap \ker \bar{\partial}, \\ X_{n,j}^{m,\dagger}, Y_{n,j}^{m,\dagger} &\in (\ker \partial_0^{n-m+2} \setminus \ker \partial_0^{n-m+1}) \cap \ker \bar{\partial}, \end{aligned} \right\}$$

wobei $m = 1, \dots, n+1$ und ∂_0^0 die Identität bezeichnet.

Bemerkung 3.4. An dieser Stelle sei bereits auf eine im Folgenden sehr wesentliche Besonderheit zwischen den differentiellen Beziehungen und den strukturellen Eigenschaften der einzelnen Polynome hingewiesen. Anhand des Korollars 3.4 lässt

sich zunächst leicht erkennen, dass bei einzelner Betrachtung der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome (3.14) für jedes feste $n \in \mathbb{N}_0$ nur die Polynome $X_{n,j}^{n+1,\dagger}$ und $Y_{n,j}^{n+1,\dagger}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) nach einmaliger Anwendung von ∂_0 verschwinden. Was also bedeutet, dass nur diese Polynome zur Teilmenge der monogenen Konstanten gehören (cf. Theorem 2.3). Betrachtet man hingegen den Zusammenhang (3.29), so stellt man fest, dass die mehrfache Anwendung der hyperkomplexen Ableitungen auf spezielle Linearkombination der Polynome bereits zu einem früheren Zeitpunkt verschwindet als es nach Korollar 3.4 für das einzelne Polynom bewiesen wurde. Dieser Sachverhalt wird an entsprechender Stelle (q.v. Beweis des Theorems 3.7) noch präzisiert.

3.2.4 Konstruktion einer \mathbb{R} -linearen Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Konstruktion eines neuartigen vollständigen Orthonormalsystems in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$, welches sich von dem in [Cação et al. 2004] angegebenen System im Wesentlichen durch praktisch bedeutsame strukturelle Eigenschaften bezüglich der hyperkomplexen Ableitung und Stammfunktion unterscheidet. Wie bereits einführend erläutert, beziehen sich die Untersuchungen auf den Unterraum $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ aller homogenen monogenen Polynome vom Grad n , der nach [Cação 2004] die Dimension $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R}) = 4n + 4$ besitzt und im Weiteren zu allen Unterräumen $\mathcal{M}_m(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, $n \neq m$ orthogonal ist. Folglich genügt es für jeden Unterraum $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$ ein Orthonormalsystem von $4n + 4$ Polynomen zu konstruieren, um eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ zu erhalten. Das in (3.14) eingeführte System

$$\{\vartheta_{n,0}^k\}_{k=1,\dots,2n+3} := \left\{ X_{n,0}^{0,\dagger}, X_{n,0}^{m,\dagger}, Y_{n,0}^{m,\dagger} \right\}_{m=1,\dots,n+1}$$

besitzt jedoch nur die Dimension $2n+3$ und kann somit nicht vollständig in $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ sein. Betrachtet man hingegen erweiterte Systeme der Form

$$\left\{ \{\vartheta_{n,0}^k\} \cup \{\vartheta_{n,i}^k\} : k = 1, \dots, 2n+3 \right\}, \quad \text{mit } i = 1 \text{ oder } i = 2 \text{ oder } i = 3,$$

so lassen sich auf diesem Weg verschiedene vollständige Systeme linear unabhängiger Polynome in $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ erzeugen, welche sich bezüglich ihrer numerischen Stabilität jedoch sehr wesentlich voneinander unterscheiden (cf. [Cação 2004]). Hierbei ließ sich

speziell für das in $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ vollständige System von $4n + 4$ linear unabhängigen Polynomen

$$\left\{ X_{n,0}^{0,\dagger}, X_{n,0}^{m,\dagger}, Y_{n,0}^{m,\dagger}, X_{n,3}^{0,\dagger}, X_{n,3}^{l,\dagger}, Y_{n,3}^{l,\dagger} \right\}_{m=1,\dots,n+1, l=1,\dots,n} \quad (3.36)$$

zeigen, dass die Konditionszahl der Gramschen Matrix bei wachsendem n nur linear mit $2n + 1$ wächst, was im Vergleich zu den anderen betrachteten Systemen deutlich besser ist. Aus diesem Grund wird bei der Konstruktion der Orthonormalbasis ausschließlich das System (3.36) verwendet.

Im Folgenden werden die normierten homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome mit

$$\tilde{X}_{n,j}^{0,\dagger} := \frac{X_{n,j}^{0,\dagger}}{\|X_{n,j}^{0,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}, \quad \tilde{X}_{n,j}^{m,\dagger} := \frac{X_{n,j}^{m,\dagger}}{\|X_{n,j}^{m,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}, \quad \tilde{Y}_{n,j}^{m,\dagger} := \frac{Y_{n,j}^{m,\dagger}}{\|Y_{n,j}^{m,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}$$

bezeichnet, wobei die jeweiligen Normen nach [Cação 2004] durch

$$\left. \begin{aligned} \|X_{n,j}^{0,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} &= \sqrt{\frac{\pi(n+1)}{2n+3}}, \\ \|X_{n,j}^{m,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} &= \|Y_{n,j}^{m,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} = \sqrt{\frac{\pi(n+1)(n+m+1)!}{2(2n+3)(n-m+1)!}} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

gegeben sind, mit $m = 1, \dots, n+1$ und $j = 0, 1, 2, 3$. Ohne weitere Ausführungen lässt sich das Hauptresultat dieses Abschnitts dann wie folgt formulieren:

Theorem 3.6. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die folgenden $4n+4$ homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$:*

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^{10} &:= \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \\ \varphi_n^{2m} &:= c_{n,m} \left(\tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger} + \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger} \right), \\ \varphi_n^{3m} &:= c_{n,m} \left(\tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger} - \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger} \right), \\ \varphi_n^{40} &:= \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}, \\ \varphi_n^{5l} &:= c_{n,-l} \left(\tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} + \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \right), \\ \varphi_n^{6l} &:= c_{n,-l} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

mit $m = 1, \dots, n+1$ und $l = 1, \dots, n$. Der reelle Koeffizient $c_{n,m}$ ist explizit durch $c_{n,m} = \sqrt{\frac{n+1}{2(n+m+1)}}$ gegeben.

Beweis. Für den Beweis des Theorems werden im Wesentlichen die in Proposition 3.2 in [Cação et al. 2004] angegebenen Beziehungen verwendet, welche in der nachfolgenden Tabelle 3.1 zusammengefasst wurden. Die Methodik orientiert sich dabei am prinzipiellen Vorgehen des Gram-Schmidt Verfahrens, indem für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ die Orthogonalitätsbeziehungen eines jeden Teilsystems aus (3.38), beginnend mit φ_n^{10} , zu den jeweils darüber liegenden Teilsystemen betrachtet werden. Die gesuchten Relationen lassen sich dann auf einfache Weise mit den Beziehungen aus Tabelle 3.1 erhalten. Aus Gründen der Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit dieser Arbeit

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})}$	$\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}$	$\tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}$	$\tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}$	$\tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}$	$\tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger}$	$\tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}$
$\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}$	1	0	0	0	0	0
$\tilde{X}_{n,0}^{k,\dagger}$	0	$\delta_{m,k}$	0	0	0	$\delta_{l,k} \frac{l}{n+1}$
$\tilde{Y}_{n,0}^{k,\dagger}$	0	0	$\delta_{m,k}$	0	$-\delta_{l,k} \frac{l}{n+1}$	0
$\tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}$	0	0	0	1	0	0
$\tilde{X}_{n,3}^{h,\dagger}$	0	0	$-\delta_{m,h} \frac{m}{n+1}$	0	$\delta_{l,h}$	0
$\tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger}$	0	$\delta_{m,h} \frac{m}{n+1}$	0	0	0	$\delta_{l,h}$

Tabelle 3.1: Eigenschaften der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome bezüglich des \mathbb{R} -wertigen inneren Produktes (2.5), mit $h, k, l, m = 1, \dots, n+1$.

werden alle notwendigen Rechenschritte kurz beschrieben.

Für das erste Polynom φ_n^{10} erhält man

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_n^{10}, \varphi_n^{10} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} &= \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} = 1, \\
\langle \varphi_n^{10}, \varphi_n^{2m} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} &= c_{n,m} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} + \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} \right] = 0, \\
\langle \varphi_n^{10}, \varphi_n^{3m} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} &= c_{n,m} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} \right] = 0, \\
\langle \varphi_n^{10}, \varphi_n^{40} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} &= \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} = 0, \\
\langle \varphi_n^{10}, \varphi_n^{5l} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} &= c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} + \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} \right] = 0, \\
\langle \varphi_n^{10}, \varphi_n^{6l} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} &= c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3; \mathbb{R})} \right] = 0,
\end{aligned}$$

mit $m = 1, \dots, n+1$ und $l = 1, \dots, n$. Die Auswertung bezüglich des Teilsystems φ_n^{2m} liefert in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_n^{2m}, \varphi_n^{2k} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} c_{n,k} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] \\
&= 2 c_{n,m} c_{n,k} \left[\delta_{m,k} + \delta_{m,k} \frac{m}{n+1} \right] = \begin{cases} 0 & : m \neq k \\ 1 & : m = k, \end{cases} \\
\langle \varphi_n^{2m}, \varphi_n^{3k} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} c_{n,k} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0, \\
\langle \varphi_n^{2m}, \varphi_n^{40} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0, \\
\langle \varphi_n^{2m}, \varphi_n^{5l} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0, \\
\langle \varphi_n^{2m}, \varphi_n^{6l} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] \\
&= c_{n,m} c_{n,-l} \left[\delta_{m,l} - \delta_{m,l} \frac{m}{n+1} + \delta_{m,l} \frac{m}{n+1} - \delta_{m,l} \right] = 0,
\end{aligned}$$

mit $m, k = 1, \dots, n+1$ und $l = 1, \dots, n$. Für φ_n^{3m} ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_n^{3m}, \varphi_n^{3k} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} c_{n,k} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. - \langle \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{k,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] \\
&= 2 c_{n,m} c_{n,k} \left[\delta_{m,k} + \delta_{m,k} \frac{m}{n+1} \right] = \begin{cases} 0 & : m \neq k \\ 1 & : m = k, \end{cases} \\
\langle \varphi_n^{3m}, \varphi_n^{40} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0, \\
\langle \varphi_n^{3m}, \varphi_n^{5l} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \left. - \langle \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] \\
&= c_{n,m} c_{n,-l} \left[\delta_{m,l} - \delta_{m,l} \frac{m}{n+1} + \delta_{m,l} \frac{m}{n+1} - \delta_{m,l} \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n^{3^m}, \varphi_n^{6^l} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,m} c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,3}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. - \langle \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0, \end{aligned}$$

mit $m, k = 1, \dots, n+1$ und $l = 1, \dots, n$. Analog berechnet man

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n^{4^0}, \varphi_n^{4^0} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= \langle \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} = 1, \\ \langle \varphi_n^{4^0}, \varphi_n^{5^l} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0, \\ \langle \varphi_n^{4^0}, \varphi_n^{6^l} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,-l} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n^{5^l}, \varphi_n^{5^h} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,-l} c_{n,-h} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. + \langle \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] \\ &= 2 c_{n,-l} c_{n,-h} \left[\delta_{l,h} - \delta_{l,h} \frac{l}{n+1} \right] = \begin{cases} 0 & : l \neq h \\ 1 & : l = h, \end{cases} \\ \langle \varphi_n^{5^l}, \varphi_n^{6^h} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,-l} c_{n,-h} \left[\langle \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. + \langle \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] = 0, \end{aligned}$$

mit $l, h = 1, \dots, n$. Schließlich erhält man auch für das Teilsystem $\varphi_n^{6^l}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n^{6^l}, \varphi_n^{6^h} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} &= c_{n,-l} c_{n,-h} \left[\langle \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} - \langle \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. - \langle \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} + \langle \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{R})} \right] \\ &= 2 c_{n,-l} c_{n,-h} \left[\delta_{l,h} - \delta_{l,h} \frac{l}{n+1} \right] = \begin{cases} 0 & : l \neq h \\ 1 & : l = h, \end{cases} \end{aligned}$$

mit $l, h = 1, \dots, n$, wodurch die Orthonormalität des Systems (3.38) vollständig bewiesen wäre. \square

Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ werden zunächst die $4n+4$ orthonormalen Polynome unter der Bezeichnung

$$\{\varphi_{n,\mathbb{R}}^k\}_{k=1,\dots,4n+4} := \left\{ \varphi_n^{1^0}, \varphi_n^{2^m}, \varphi_n^{3^m}, \varphi_n^{4^0}, \varphi_n^{5^l}, \varphi_n^{6^l} \right\}_{m=1,\dots,n+1, l=1,\dots,n}$$

zusammengefasst. Aus der Dimension des Orthonormalsystems in $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ und ferner aus der Orthogonalität der Unterräume $\mathcal{M}_m(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, $n \neq m$ folgert man leicht für den ganzen Raum:

Korollar 3.5. *Das System homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome $\{\varphi_{n,\mathbb{R}}^k : k = 1, \dots, 4n+4\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$.*

Aufgrund der Orthonormalität und der Vollständigkeit von (3.38) folgt bekanntermaßen auch, dass sich jede quadratisch integrierbare monogene Funktion als Fourierreihe bezüglich dieser Basis darstellen lässt.

Korollar 3.6 (Fourierreihe in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$). *Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$. Dann kann f in eine Fourierreihe nach dem vollständigen Orthonormalsystem (3.38) entwickelt werden*

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n^{\bar{1}0} \alpha_n + \sum_{m=1}^{n+1} \left(\varphi_n^{\bar{2}m} \beta_{n,m} + \varphi_n^{\bar{3}m} \gamma_{n,m} \right) + \varphi_n^{\bar{4}0} \delta_n + \sum_{l=1}^n \left(\varphi_n^{\bar{5}l} \epsilon_{n,l} + \varphi_n^{\bar{6}l} \eta_{n,l} \right) \right], \quad (3.39)$$

wobei die \mathbb{R} -wertigen Fourierkoeffizienten durch

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \mathbf{Sc} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_n^{\bar{1}0}} f dV, & \beta_{n,m} &= \mathbf{Sc} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_n^{\bar{2}m}} f dV, & \gamma_{n,m} &= \mathbf{Sc} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_n^{\bar{3}m}} f dV, \\ \delta_n &= \mathbf{Sc} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_n^{\bar{4}0}} f dV, & \epsilon_{n,l} &= \mathbf{Sc} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_n^{\bar{5}l}} f dV, & \eta_{n,l} &= \mathbf{Sc} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_n^{\bar{6}l}} f dV \end{aligned}$$

zu bestimmen sind.

Vermittels der Parsevalschen Gleichung lässt sich dann f bekanntlich auch über die zugehörigen Fourierkoeffizienten charakterisieren.

Korollar 3.7. *$f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ ist gleichwertig mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[|\alpha_n|^2 + \sum_{m=1}^{n+1} (|\beta_{n,m}|^2 + |\gamma_{n,m}|^2) + |\delta_n|^2 + \sum_{l=1}^n (|\epsilon_{n,l}|^2 + |\eta_{n,l}|^2) \right] < \infty. \quad (3.40)$$

Für diese Orthonormalbasis lassen sich im Weiteren wichtige Eigenschaften bezüglich der hyperkomplexen Ableitung zeigen, die es ferner ermöglichen auf jedem Unterraum $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ einen Primitivierungsoperator $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ zu definieren. An dieser

Stelle wird der Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ zunächst nur als formale Umkehrung der hyperkomplexen Ableitung eines einzelnen Basispolynoms eingeführt. Zu einem späteren Zeitpunkt werden für diesen Operator auch die kontinuierliche Fortsetzung auf den ganzen Raum $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ und seine Abbildungseigenschaften studiert (q.v. Kapitel 3.2.8).

Theorem 3.7. *Für die Polynome $\varphi_{n,\mathbb{R}}^k$, $k = 1, \dots, 4n + 4$ der Orthonormalbasis (3.38) gelten die Beziehungen:*

- (I) *Die Anwendung der hyperkomplexen Ableitung $\partial_0 = \frac{1}{2}\partial$ auf das vollständige Orthonormalsystem (3.38) liefert*

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 \varphi_n^{10} &= d_{n,0} \varphi_{n-1}^{10}, & \partial_0 \varphi_n^{2m} &= d_{n,m} \varphi_{n-1}^{2m}, & \partial_0 \varphi_n^{3m} &= d_{n,m} \varphi_{n-1}^{3m}, \\ \partial_0 \varphi_n^{40} &= d_{n,0} \varphi_{n-1}^{40}, & \partial_0 \varphi_n^{5l} &= d_{n,-l} \varphi_{n-1}^{5l}, & \partial_0 \varphi_n^{6l} &= d_{n,-l} \varphi_{n-1}^{6l}, \end{aligned} \right\}$$

wobei $d_{n,m} = \sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m+1)}{2n+1}}$ und $m = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$.

- (II) *Der Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{H}; \mathbb{R})$, explizit gegeben durch*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{10} &= p_{n,0} \varphi_{n+1}^{10}, & \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{2m} &= p_{n,m} \varphi_{n+1}^{2m}, & \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{3m} &= p_{n,m} \varphi_{n+1}^{3m}, \\ \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{40} &= p_{n,0} \varphi_{n+1}^{40}, & \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{5l} &= p_{n,-l} \varphi_{n+1}^{5l}, & \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{6l} &= p_{n,-l} \varphi_{n+1}^{6l}, \end{aligned} \right\}$$

definiert eine Primitive auf der \mathbb{R} -linearen Orthonormalbasis, so dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ und $k = 1, \dots, 4n + 4$ die Beziehung $\partial_0 [\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_{n,\mathbb{R}}^k] = \varphi_{n,\mathbb{R}}^k$ gilt. Der reelle Koeffizient ist dabei durch $p_{n,m} = \sqrt{\frac{2n+3}{(2n+5)(n+m+1)(n-m+2)}}$ gegeben, mit $m = 1, \dots, n+1$ und $l = 1, \dots, n$.

- (III) *Es sei ∂_0^n die n -fache Anwendung der hyperkomplexen Ableitung. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\begin{aligned} \varphi_n^{10}, \varphi_n^{40} &\in (\ker \partial_0^{n+1} \setminus \ker \partial_0^n) \cap \ker \bar{\partial}, \\ \varphi_n^{2m}, \varphi_n^{3m} &\in (\ker \partial_0^{n-m+2} \setminus \ker \partial_0^{n-m+1}) \cap \ker \bar{\partial}, \quad m = 1, \dots, n+1, \\ \varphi_n^{5l}, \varphi_n^{6l} &\in (\ker \partial_0^{n-l+1} \setminus \ker \partial_0^{n-l}) \cap \ker \bar{\partial}, \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

wobei ∂_0^0 die Identität bezeichnet.

Beweis. Nach Anwendung der Relationen (3.30) und unter Berücksichtigung der Norm (3.37) sowie der reellen Konstante $c_{n,m}$ erhält man für die hyperkomplexen Ableitungen des Systems (3.38) die Beziehungen

$$\partial_0 \varphi_n^{10} = \partial_0 \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger} = (n+1) \frac{\|X_{n-1,0}^{0,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}{\|X_{n,0}^{0,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}} \varphi_{n-1}^{10} = d_{n,0} \varphi_{n-1}^{10}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi_n^{2m} &= \partial_0 \left[c_{n,m} \left(\tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger} + \tilde{Y}_{n,3}^{m,\dagger} \right) \right] \\ &= (n+m+1) \frac{c_{n,m} \|X_{n-1,0}^{m,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}{c_{n-1,m} \|X_{n,0}^{m,\dagger}\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}} \varphi_{n-1}^{2m} = d_{n,m} \varphi_{n-1}^{2m}, \end{aligned}$$

mit $m = 1, \dots, n+1$. Der Beweis der Beziehungen $\partial_0 \varphi_n^{3m}, \partial_0 \varphi_n^{40}, \partial_0 \varphi_n^{5l}, \partial_0 \varphi_n^{6l}$ erfolgt analog.

Die $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ -Primitiven lassen sich in einfacher Weise aus den Ausdrücken der hyperkomplexen Ableitungen berechnen. Exemplarisch wird hierzu das Teilsystem $\partial_0 \varphi_n^{2m}$, $m = 1, \dots, n+1$ betrachtet. Die Anwendung des Operators $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ auf beiden Seiten der Gleichung $\partial_0 \varphi_n^{2m} = d_{n,m} \varphi_{n-1}^{2m}$ ergibt bereits nach wenigen Umformungen die gesuchte Beziehung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \left[\partial_0 \varphi_{n^*}^{2m} \right] &= \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \left[d_{n^*,m} \varphi_{n^*-1}^{2m} \right] \quad \Rightarrow \quad \varphi_{n^*}^{2m} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \left[d_{n^*,m} \varphi_{n^*-1}^{2m} \right] \\ &\stackrel{n^*=n+1}{\Rightarrow} \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{2m} = \frac{1}{d_{n+1,m}} \varphi_{n+1}^{2m} \\ &\Rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_n^{2m} = p_{n,m} \varphi_{n+1}^{2m}. \end{aligned}$$

Somit bleibt noch Paragraph (III) des Theorems zu zeigen. Für die polynomialen Teilsysteme $\varphi_n^{00}, \varphi_n^{2m}, \varphi_n^{3m}$ und φ_n^{40} der Orthonormalbasis (3.38) folgt die Behauptung direkt aus Korollar 3.4. Im Falle der Teilsysteme φ_n^{5l} und φ_n^{6l} wird zunächst auf beide Gleichungen die Beziehung (3.29) angewendet. Äquivalent ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^{5l} &= c_{n,l+1} \left(\tilde{Y}_{n,1}^{l+1,\dagger} - \tilde{X}_{n,2}^{l+1,\dagger} \right), \\ \varphi_n^{6l} &= c_{n,l+1} \left(\tilde{X}_{n,1}^{l+1,\dagger} + \tilde{Y}_{n,2}^{l+1,\dagger} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

mit $l = 1, \dots, n$. Die am Ende des vorangegangenen Abschnitts kurz angedeuteten strukturellen Besonderheiten der Polynome können nun konkretisiert werden.

zum Grad $n + 1$. Wegen Paragraph (II) des Theorems 3.7 sind die polynomialen Primitiven erneut nur reelle Vielfache einzelner Basiselemente des gleichen Systems und demzufolge automatisch orthogonal zueinander. Diese Eigenschaft verbessert das in [Cação et al. 2004] konstruierte System sehr wesentlich, da die Primitiven in dem Fall nur auf \mathbb{H} -wertige Linearkombinationen der Basispolynome führen und kein Orthogonalsystem bilden. Weiterhin folgt aus Paragraph (III), dass die erhaltenen $4n + 4$ (orthogonalen) Primitiven jeweils orthogonal zu den 4 monogenen Konstanten $\varphi_{n+1}^{2n+2}, \varphi_{n+1}^{3n+2}, \varphi_{n+1}^{5n+1}, \varphi_{n+1}^{6n+1} \in \ker \partial \cap \ker \bar{\partial}$ sind. Im Umkehrschluss resultiert aus der letztgenannten Eigenschaft ebenfalls eine sehr wichtige Beziehung für die hyperkomplexe Ableitung des Systems. Die Anwendung von ∂_0 auf das Ausgangssystem von $4n + 4$ orthonormalen Polynomen liefert nach Paragraph (I) exakt $4n$ orthogonale Polynome vom Grad $n - 1$ und somit erneut ein vollständiges Orthogonalsystem in $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{H}; \mathbb{R})$. Wiederum spielen dabei die 4 monogenen Konstanten $\varphi_n^{2n+1}, \varphi_n^{3n+1}, \varphi_n^{5n}, \varphi_n^{6n} \in \ker \partial \cap \ker \bar{\partial}$ eine besondere Rolle, welche nun infolge der Differentiation auf natürliche Weise zu Null werden. In [Cação et al. 2004] führte die Ableitung der Basiselemente hingegen auf $4n + 2$ linear abhängige Polynome vom Grad $n - 1$, was wiederholt die neue Qualität der Orthonormalbasis (3.38) unterstreicht.

3.2.5 Konstruktion einer \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome

Im vorangegangenen Abschnitt wurde ein vollständiges \mathbb{R} -lineares Orthonormalsystem konstruiert und einige wichtige Eigenschaften für diese Basis aufgezeigt. Es stellt sich nun die Frage nach der Existenz einer \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ mit ähnlichen Struktureigenschaften wie im \mathbb{R} -linearen Fall. Nach [Sudbery 1979] ist bekanntlich die Dimension des monogenen Unterraumes $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{H}) = n + 1$. Damit ist die Konstruktionsidee für eine Orthonormalbasis in $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{H})$, genau diejenigen Polynome des \mathbb{R} -linearen Systems (3.38) durch geeignete Linearkombinationen zusammenzufassen, welche nach Teilbehauptung (III) des Theorems 3.7 zum gleichen Kern bezüglich der i -fachen hyperkomplexen Ableitung gehören. Daher wird die Konstruktion mit den Polynomen der Teilmenge $(\ker \partial_0^{n+1} \setminus \ker \partial_0^n) \cap \ker \bar{\partial}$ begonnen. Nach Paragraph (III) des Theorems 3.7 lautet

somit der Ansatz

$$\begin{aligned}\varphi_{n,\mathbb{H}}^0 &= \frac{1}{2} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger} + \tilde{X}_{n,3}^{0,\dagger} + \sqrt{\frac{n+1}{2(n+2)}} \left(\tilde{X}_{n,3}^{1,\dagger} - \tilde{Y}_{n,0}^{1,\dagger} - \tilde{X}_{n,0}^{1,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{1,\dagger} \right) \right].\end{aligned}$$

Bringt man die Relation (3.21) auf die Form

$$\left(\tilde{X}_{n,1}^{1,\dagger} + \tilde{Y}_{n,2}^{1,\dagger} \right) \mathbf{e}_j = \frac{(n+2) \left\| X_{n,j}^{0,\dagger} \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}{\left\| X_{n,j}^{1,\dagger} \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}} \tilde{X}_{n,j}^{0,\dagger} = \sqrt{\frac{2(n+2)}{n+1}} \tilde{X}_{n,j}^{0,\dagger},$$

so folgt schließlich

$$\varphi_{n,\mathbb{H}}^0 = \frac{1}{2} \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger} (1 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \quad (3.42)$$

Analog lässt sich bei den Teilmengen $(\ker \partial_0^{n-l+1} \setminus \ker \partial_0^{n-l}) \cap \ker \bar{\partial}$ vorgehen. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $l = 1, \dots, n$ lautet der Ansatz

$$\begin{aligned}\varphi_{n,\mathbb{H}}^l &= \frac{1}{2} \left[-\begin{smallmatrix} 2 & l+1 \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 3 & l+1 \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 5 & l \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 6 & l \\ \varphi_n & \end{smallmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[c_{n,l+1} \left(\tilde{X}_{n,3}^{l+1,\dagger} - \tilde{Y}_{n,0}^{l+1,\dagger} - \tilde{X}_{n,0}^{l+1,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l+1,\dagger} \right) \right. \\ &\quad \left. + c_{n,-l} \left(\tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} + \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} + \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \right]. \quad (3.43)\end{aligned}$$

Für die Darstellung (3.29) erhält man nach Normierung der Polynome

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{n,1}^{l+1,\dagger} + \tilde{Y}_{n,2}^{l+1,\dagger} &= \frac{(n+l+2) \left\| X_{n,0}^{l,\dagger} \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}{\left\| X_{n,1}^{l+1,\dagger} \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \\ &= \sqrt{\frac{n+l+2}{n-l+1}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right),\end{aligned}$$

wodurch sich (3.43) zu

$$\begin{aligned}\varphi_{n,\mathbb{H}}^l &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2(n-l+1)}} \left[\left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} + \tilde{Y}_{n,0}^{l,\dagger} \right) + \left(\tilde{X}_{n,1}^{l,\dagger} + \tilde{Y}_{n,1}^{l,\dagger} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{X}_{n,2}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,2}^{l,\dagger} \right) + \left(\tilde{X}_{n,3}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} c_{n,-l} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) (1 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \quad (3.44)\end{aligned}$$

vereinfacht, mit $l = 1, \dots, n$. Wie man erkennt, tritt die aus der Konstruktion resultierende \mathbb{H} -wertige Konstante $\frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ sowohl in der Beziehung (3.42)

als auch in den Beziehungen (3.44) auf und kann daher im Folgenden vernachlässigt werden. Somit lässt sich an dieser Stelle zunächst festhalten, dass für den Unterraum $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ ein System von $n+1$ homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynomen konstruiert werden konnte, welches hinsichtlich der Ableitungen höherer Ordnung ein ähnliches Verhalten wie das reelle System besitzt. Ohne weitere Ausführungen folgt nun zuerst das Hauptresultat dieses Abschnitts. Weitere Eigenschaften des Systems werden im Anschluss untersucht.

Theorem 3.8. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die folgenden $n+1$ homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$:*

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n,\mathbb{H}}^0 &:= \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \\ \varphi_{n,\mathbb{H}}^l &:= c_{n,-l} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

wobei $c_{n,-l} = \sqrt{\frac{n+1}{2(n-l+1)}}$ und $l = 1, \dots, n$.

Beweis. Der Beweis des Theorems 3.8 erfolgt hauptsächlich unter Verwendung der Definitionen (3.15), (3.16) und (3.17), wodurch sehr umfangreiche Berechnungen entstehen. Aus diesem Grund werden bei den nachfolgenden Ausführungen lediglich die für den Beweis wesentlichen Berechnungsschritte angegeben. Hierfür ist nun die Orthonormalität des Systems (3.45) bezüglich des \mathbb{H} -wertigen inneren Produktes (2.6) zu zeigen. Für das Polynom $\varphi_{n,\mathbb{H}}^0$ erhält man

$$\langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^0, \varphi_{n,\mathbb{H}}^0 \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = 1$$

und außerdem

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^0, \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = c_{n,-l} \langle \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} \\ \Leftrightarrow 0 &= \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) dV, \end{aligned}$$

mit $l = 1, \dots, n$. Seien nun f eine \mathbb{H} -wertige Funktion und $[f]_i$ die Koordinaten von f , dann gilt bekanntlich

$$\int_{\mathbb{B}_3} f dV = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{B}_3} [f]_i dV = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, 3.$$

Mit den Beziehungen (3.15), (3.16) und (3.17) erhält man nach koordinatenweiser Auswertung

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \right]_0 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [\mathbf{A}^{0,n} \mathbf{A}^{l,n} + \mathbf{B}^{0,n} (\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n})] \cos l\varphi dV = 0, \quad l = 1, \dots, n, \\
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \right]_1 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [\mathbf{A}^{0,n} (\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n}) - \mathbf{B}^{0,n} \mathbf{A}^{l,n}] (\cos \varphi \cos l\varphi - \sin \varphi \sin l\varphi) dV \\
&= 0, \quad l = 1, \dots, n, \\
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \right]_2 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [\mathbf{A}^{0,n} (\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n}) - \mathbf{B}^{0,n} \mathbf{A}^{l,n}] (\sin \varphi \cos l\varphi + \cos \varphi \sin l\varphi) dV \\
&= 0, \quad l = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \right]_3 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [-\mathbf{A}^{0,n} \mathbf{A}^{l,n} - \mathbf{B}^{0,n} (\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n})] \sin l\varphi dV = 0, \quad l = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Auf gleichem Weg wird die Orthogonalität der Polynome $\varphi_{n,\mathbb{H}}^l$, $l = 1, \dots, n$ bewiesen. Hierzu wird zunächst

$$\langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \varphi_{n,\mathbb{H}}^h \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = c_{n,-l} c_{n,-h} \langle \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})}$$

berechnet. Nach Tabelle 3.1 erhält man für den Fall $l = h$ sofort

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} &= c_{n,-l}^2 \langle \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} \\
&= c_{n,-l}^2 \left[1 - 2 \frac{l}{n+1} + 1 \right] = 1.
\end{aligned}$$

Eine Anwendung der reellen Beziehungen nach Tabelle 3.1 ist in diesem Schritt zulässig, da die durch die inneren Produkte (2.5) und (2.6) induzierten Normen identisch sind. Für den Fall $l \neq h$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \varphi_{n,\mathbb{H}}^h \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = c_{n,-l} c_{n,-h} \langle \tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} \\
\Leftrightarrow 0 &= \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \right) dV.
\end{aligned}$$

Nach umfangreichen Berechnungen lässt sich die koordinatenweise Betrachtung schließlich wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \right) \right]_0 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [\mathbf{A}^{l,n} \mathbf{A}^{h,n} + (\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n})(\mathbf{B}^{h,n} + \mathbf{C}^{h,n})] (\cos l\varphi \cos h\varphi + \sin l\varphi \sin h\varphi) dV \\
&= 0, \quad l, h = 1, \dots, n, \quad l \neq h, \\
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \right) \right]_1 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [\mathbf{A}^{h,n}(\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n}) - \mathbf{A}^{l,n}(\mathbf{B}^{h,n} + \mathbf{C}^{h,n})] \left(\cos \varphi (\sin l\varphi \sin h\varphi - \cos l\varphi \cos h\varphi) \right. \\
&\quad \left. + \sin \varphi (\cos l\varphi \sin h\varphi + \sin l\varphi \cos h\varphi) \right) dV = 0, \quad l, h = 1, \dots, n, \quad l \neq h, \\
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \right) \right]_2 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [\mathbf{A}^{l,n}(\mathbf{B}^{h,n} + \mathbf{C}^{h,n}) - \mathbf{A}^{h,n}(\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n})] \left(\cos \varphi (\cos l\varphi \sin h\varphi + \sin l\varphi \cos h\varphi) \right. \\
&\quad \left. + \sin \varphi (\cos l\varphi \cos h\varphi - \sin l\varphi \sin h\varphi) \right) dV = 0, \quad l, h = 1, \dots, n, \quad l \neq h
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{B}_3} \left[\overline{\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{h,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{h,\dagger} \right) \right]_3 dV \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} [\mathbf{A}^{l,n} \mathbf{A}^{h,n} + (\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n})(\mathbf{B}^{h,n} + \mathbf{C}^{h,n})] (\sin l\varphi \cos h\varphi - \cos l\varphi \sin h\varphi) dV \\
&= 0, \quad l, h = 1, \dots, n, \quad l \neq h.
\end{aligned}$$

Die Orthonormalität des Systems (3.45) ist damit vollständig gezeigt. \square

Da für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ das Orthonormalsystem (3.45) die Dimension $n + 1$ besitzt und daher vollständig im Unterraum $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ ist, folgert man:

Korollar 3.8. *Das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l : l = 0, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.*

Aufgrund der Orthogonalität und Vollständigkeit der Basis (3.45) lässt sich nun analog zum \mathbb{R} -linearen Fall eine Fourierreihenentwicklung in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ angeben.

Korollar 3.9 (Fourierreihe in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$). *Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$. Dann lässt sich f in eine Fourierreihe nach der Orthonormalbasis (3.45) entwickeln:*

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l}, \quad \text{mit} \quad \alpha_{n,l} = \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l} f dV. \quad (3.46)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass im Gegensatz zur komplexen und auch zur \mathbb{R} -linearen monogenen Fourierreihe die Reihenfolge der Funktionen $\varphi_{n,\mathbb{H}}^l$ und f im inneren Produkt der \mathbb{H} -rechts-linearen Reihe zu beachten ist.

Gleichmaßen führt die Charakterisierung von $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ durch die zugehörigen Fourierkoeffizienten auf die Parsevalsche Gleichung.

Korollar 3.10. $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ ist äquivalent zu $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n |\alpha_{n,l}|^2 < \infty$.

Des Weiteren können die signifikanten Ableitungs- und Primitivierungseigenschaften der \mathbb{R} -linearen Orthonormalbasis nun auch für das \mathbb{H} -lineare Funktionensystem gezeigt werden.

Theorem 3.9. *Für die Polynome $\varphi_{n,\mathbb{H}}^l$, $l = 0, \dots, n$ der Orthonormalbasis (3.45) gelten die folgenden Eigenschaften:*

- (I) *Die Anwendung der hyperkomplexen Ableitung $\partial_0 = \frac{1}{2}\partial$ auf die Basispolynome in (3.45) liefert*

$$\partial_0 \varphi_{n,\mathbb{H}}^k = \sqrt{\frac{(2n+3)(n-k)(n+k+1)}{2n+1}} \varphi_{n-1,\mathbb{H}}^k, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (II) *Der Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{H}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{H}; \mathbb{H})$, explizit gegeben durch*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l = \sqrt{\frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)}} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l,$$

definiert eine Primitive auf der \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis, so dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ und $l = 0, \dots, n$ die Beziehung $\partial_0 [\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l] = \varphi_{n,\mathbb{H}}^l$ gilt.

- (III) *Es sei ∂_0^n die n -fache Anwendung der hyperkomplexen Ableitung. Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\varphi_{n,\mathbb{H}}^l \in (\ker \partial_0^{n-l+1} \setminus \ker \partial_0^{n-l}) \cap \ker \bar{\partial}, \quad l = 0, \dots, n,$$

wobei ∂_0^0 die Identität bezeichnet.

Beweis. Der Beweis der Teilbehauptungen (I) und (II) des Theorems 3.9 ist analog zum \mathbb{R} -linearen System (q.v. Beweis des Theorems 3.7) zu führen und kann demzufolge leicht nachvollzogen werden. Teilbehauptung (III) des Theorems ist trivialerweise nach Konstruktion des Systems erfüllt. \square

In Analogie zum reellen System sollen abschließend noch einmal die strukturelle Anordnung der Basiselemente sowie die qualitativen Abbildungseigenschaften des Differential- und Primitivierungsoperators graphisch veranschaulicht werden. Wie

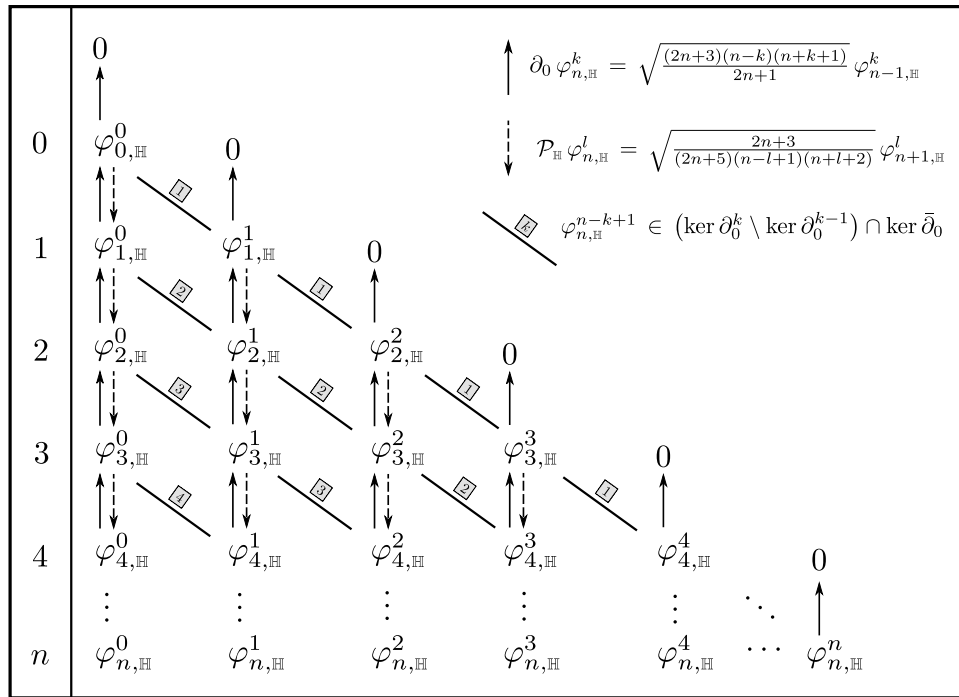


Abbildung 3.3: Strukturschema der Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.

man anhand der Abbildung 3.3 erkennen kann, ließ sich die im Wesentlichen aus vier Blöcken bestehende Anordnung der \mathbb{R} -linearen Basis (cf. Abbildung 3.2) auf einen Block reduzieren, in welchem die Basiselemente in Form einer Dreiecksmatrix angeordnet sind. Die Wirkungsweise des Differential- bzw. Primitivierungsoperators auf den Basiselementen kann dabei als Abbildungen innerhalb der jeweiligen Spalten des Strukturschemas charakterisiert werden. Dies unterscheidet sich sehr wesentlich von dem in [Caçõ 2004] konstruierten System, aber auch vom System der verallgemeinerten Potenzen (cf. Abbildung 3.1). Wie sich noch zeigen wird, ist es aber gerade diese strukturelle Eigenschaft der Orthonormalbasis (3.45), welche für die im

Weiteren betrachteten Anwendungen von besonderer Bedeutung ist.

3.2.6 Ableitungen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen

In diesem Abschnitt werden die konstruierten Orthonormalsysteme bezüglich ihrer hyperkomplexen Ableitung ∂_0 untersucht. Eine wichtige Eigenschaft dieser Systeme ist, dass die elementweise Anwendung der Ableitung auf Basispolynome vom Grad n erneut auf einzelne Basiselemente vom Grad $n - 1$ führt. Aufgrund der Tatsache, dass sich für manche Problemstellungen das \mathbb{R} -lineare System gegenüber dem \mathbb{H} -linearen System besser eignet und umgekehrt, werden die theoretischen Grundlagen für beide Systeme studiert.

Monogene Ableitungen in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$

Begonnen wird mit dem in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ vollständigen Orthonormalsystem (3.38). Nach Paragraph (I) des Theorems 3.7 lässt sich folgern, dass für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die hyperkomplexe Ableitung der $4n + 4$ Basispolynome auf genau $4n$ orthogonale Polynome zum Grad $n - 1$ führt. Dies stimmt mit der Behauptung in Paragraph (III) überein, wonach 4 Polynome zur Menge der monogenen Konstanten gehören und daher nach Differentiation zu Null werden.

Lemma 3.5. *Das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome*

$$\left\{ \partial_0^1 \varphi_n^0, \partial_0^2 \varphi_n^m, \partial_0^3 \varphi_n^m, \partial_0^4 \varphi_n^0, \partial_0^5 \varphi_n^l, \partial_0^6 \varphi_n^l : m = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n - 1 \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

ist eine Orthogonalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$.

Beweis. Aus der Dimension des Unterraumes $\dim \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{H}; \mathbb{R}) = 4n$ und der Orthogonalität der resultierenden homogenen Polynome folgt der Beweis der Behauptung. \square

Als direkte Konsequenz aus dem letzten Resultat lässt sich nun die hyperkomplexe Ableitung einer beliebigen \mathbb{H} -holomorphen Funktion mit Hilfe der zugehörigen Fourierreihe betrachten.

Lemma 3.6. *Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$. Die Anwendung der hyperkomplexen Ableitung ∂_0 auf jeden Summanden der assoziierten Fourierreihe (3.39) von f führt*

auf die Orthogonalreihe

$$\begin{aligned} \partial_0 f = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[d_{n+1,0} \varphi_n^1 \alpha_{n+1} + \sum_{m=1}^{n+1} d_{n+1,m} \left(\varphi_n^2 \beta_{n+1,m} + \varphi_n^3 \gamma_{n+1,m} \right) \right. \\ & \left. + d_{n+1,0} \varphi_n^4 \delta_{n+1} + \sum_{l=1}^n d_{n+1,-l} \left(\varphi_n^5 \epsilon_{n+1,l} + \varphi_n^6 \eta_{n+1,l} \right) \right], \end{aligned}$$

wobei $d_{n+1,m} = \sqrt{\frac{(2n+5)(n+m+1)(n-m+2)}{2n+3}}$ und $\alpha_n, \beta_{n,m}, \gamma_{n,m}, \delta_n, \epsilon_{n,l}, \eta_{n,l} \in \mathbb{R}$. Diese Reihe konvergiert punktweise in \mathbb{B}_3 und in $L^2(\mathbb{B}_3(0, r); \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ für alle $r < 1$.

Beweis. In [Gürlebeck et al. 2006] wurde bewiesen, dass für verallgemeinerte Potenzreihen im \mathbb{R}^{n+1} in Bezug auf einen bestimmten Konvergenzradius die Rolle der Summation und Differentiation vertauscht werden kann. Die Behauptung folgt dann nach Anwendung des Paragraphen (I) des Theorems 3.7 auf jeden Summanden der Fourierreihe von f . \square

Monogene Ableitungen in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$

Analog wird nun die Orthonormalbasis (3.45) betrachtet. Bekanntermaßen ist nach Konstruktion das \mathbb{H} -lineare System in Bezug auf seine strukturellen Eigenschaften vollkommen äquivalent zum \mathbb{R} -linearen System, wodurch sich die obigen Ergebnisse sehr leicht übertragen lassen. Im Weiteren zeigt sich für das \mathbb{H} -lineare System eine ausgeprägte Analogie zur komplexen Orthonormalbasis, auf die im Folgenden noch etwas näher eingegangen wird. Aus Teilbehauptung (I) des Theorems 3.9 folgt zunächst:

Lemma 3.7. *Das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome $\left\{ \partial_0 \varphi_{n,\mathbb{H}}^k : k = 0, \dots, n-1 \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Orthogonalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.*

Beweis. Analog zum \mathbb{R} -linearen Fall folgt der Beweis der Behauptung aus der Dimension des Unterraumes $\dim \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{H}; \mathbb{H}) = n$ und der Orthogonalität der resultierenden homogenen Polynome. \square

Folglich lässt sich auch die hyperkomplexe Ableitung einer beliebigen monogenen Funktion aus $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ mit Hilfe ihrer Fourierreihe ausdrücken.

Lemma 3.8. *Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$. Die Anwendung der hyperkomplexen Ableitung ∂_0 auf jeden Summanden der assoziierten Fourierreihe (3.46) von f liefert*

die Orthogonalreihe

$$\partial_0 f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{(2n+5)(n-k+1)(n+k+2)}{2n+3}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^k \alpha_{n+1,k}, \quad (3.47)$$

wobei $\alpha_{n,k} \in \mathbb{H}$. Diese Reihe konvergiert punktweise in \mathbb{B}_3 und in $L^2(\mathbb{B}_3(0, r); \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ für alle $r < 1$.

Beweis. Der Beweis ist analog zum \mathbb{R} -linearen Fall zu führen. \square

Vergleicht man die Darstellung (3.47) mit dem ebenfalls vollständigen System der hyperkomplexen Ableitungen homogener Polynome in [Cação et al. 2006], so konnte in dieser Arbeit nur gezeigt werden, dass die Ableitung der Basiselemente zunächst auf ein System linear abhängiger Polynome führt, welches wiederum durch Entfernen der linear abhängigen Elemente in ein vollständiges System homogener (nicht orthogonaler) Polynome überführt werden kann. Durch die Orthonormalbasis (3.45) ergibt sich die hyperkomplexe Ableitung der Fourierreihe nun aber direkt als Orthogonalreihe, was bekanntermaßen auch auf die komplexe Potenzreihe zutrifft. Dies soll anhand der eingangs erwähnten Fourierreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{z}^n \beta_n$ einer \mathbb{C} -wertigen Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ verdeutlicht werden. Da für die Elemente der Orthonormalbasis $\{\tilde{z}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ ähnliche Eigenschaften bezüglich der komplexen Ableitung ∂_z gelten, erhält man für die Ableitung der Fourierdarstellung

$$\partial_z f = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} \tilde{z}^n \beta_{n+1}.$$

Diese ist also bis auf einen reellen Faktor und die Dimension der polynomialen Basis vollkommen äquivalent zur \mathbb{H} -linearen Darstellung (3.47).

In Vorbereitung des nächsten Abschnitts seien für die Basispolynome schließlich noch die hyperkomplexen Ableitungen höherer Ordnung angegeben, die sich in einfacher Weise aus den Paragraphen (I) und (III) des Theorems 3.9 berechnen lassen.

Korollar 3.11. *Die i -fache Anwendung der hyperkomplexen Ableitung ∂_0^i auf eine beliebige Basisfunktion $\varphi_{n,\mathbb{H}}^k$ der Orthonormalbasis (3.45) ergibt*

$$\partial_0^i \varphi_{n,\mathbb{H}}^k = \begin{cases} \prod_{j=0}^{i-1} \sqrt{\frac{(2(n-j)+3)(n-j-k)(n-j+k+1)}{2(n-j)+1}} \varphi_{n-i,\mathbb{H}}^k & : 1 \leq i \leq n-k, \\ 0 & : i > n-k, \end{cases}$$

wobei $k = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \mathbb{N}$.

3.2.7 Orthogonale Zerlegung des Hilbert-Raumes $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H})$

Gegenstand der folgenden Betrachtungen sei nun der Dekompositionssatz für die orthogonale Zerlegung des \mathbb{H} -linearen Hilbert-Raumes $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.

Theorem 3.10 (Dekompositionssatz [Cação et al. 2004]). *Der Raum $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ erlaubt die orthogonale Zerlegung*

$$L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{n \geq 0} ((\ker \partial_0^{n+1} \ominus \ker \partial_0^n) \cap \ker \bar{\partial}).$$

Zum besseren Verständnis sei hierbei noch angemerkt, dass durch die Notation $\ker \partial_0^{n+1} \ominus \ker \partial_0^n$ das orthogonale Komplement von $\ker \partial_0^n$ in $\ker \partial_0^{n+1}$ bezeichnet wird. Dieses wichtige theoretische Resultat wurde bereits in [Cação et al. 2004] mit Hilfe der dort angegebenen \mathbb{R} -linearen Orthonormalbasis bewiesen. Dabei gelang es jedoch nicht, polynomiale Basissysteme für jeden unendlich dimensional orthogonalem Teilraum der L^2 -Zerlegung anzugeben, da bereits der Teilraum der monogenen Konstanten des dort verwendeten Orthonormalsystems nicht vollständig ist und ferner die Orthogonalität der Basiselemente nach der Differentiation verloren geht. Für die praktische Anwendbarkeit von Theorem 3.10 sind dies jedoch wichtige Grundvoraussetzungen an die Ansatzsysteme. Wie im Folgenden gezeigt wird, erfüllt das in dieser Arbeit konstruierte Orthonormalsystem (3.45) diese Voraussetzungen, wodurch nun für jeden unendlich dimensional Teilraum $(\ker \partial_0^{k+1} \ominus \ker \partial_0^k) \cap \ker \bar{\partial}$, $k \in \mathbb{N}_0$ der L^2 -Zerlegung eine Orthonormalbasis angegeben werden kann.

Theorem 3.11. *Für jedes beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ bilden die Polynome $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^{n-k}\}_{n \in \mathbb{N}_0, n \geq k}$ eine Orthonormalbasis im Unterraum $(\ker \partial_0^{k+1} \ominus \ker \partial_0^k) \cap \ker \bar{\partial}$ der orthogonalen Zerlegung $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{n \geq 0} ((\ker \partial_0^{n+1} \ominus \ker \partial_0^n) \cap \ker \bar{\partial})$.*

Beweis. Der Beweis des Theorems erfolgt durch vollständige Induktion. Ein wichtiges theoretisches Hilfsmittel sind dabei die im vorangegangenen Abschnitt untersuchten Reihendarstellungen monogener Ableitungen. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, dass die Konvergenzeigenschaften dieser Reihen in \mathbb{B}_3 korrekterweise im lokalen Sinne zu betrachten sind. Für den Induktionsanfang ist zu zeigen, dass die Teilmenge $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis im Unterraum der monogenen Konstanten $\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}$ ist. Dazu wird angenommen, dass für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ die Bedingungen $\partial_0 f = 0$ und $f \perp \varphi_{k,\mathbb{H}}^k \forall k \in \mathbb{N}_0$ gelten.

Ersetzt man f äquivalent durch seine Fourierreihe (3.46), so ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f, \varphi_{k,\mathbb{H}}^k \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l}, \varphi_{k,\mathbb{H}}^k \right\rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} \\
&= \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l} \right)} \varphi_{k,\mathbb{H}}^k dV = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \overline{\alpha_{n,l}} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l} \varphi_{k,\mathbb{H}}^k dV \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \overline{\alpha_{n,l}} \langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \varphi_{k,\mathbb{H}}^k \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})}.
\end{aligned}$$

Wegen $\langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \varphi_{k,\mathbb{H}}^k \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = \delta_{n,k} \cdot \delta_{l,k}$ ergibt sich letzte Gleichung zu

$$0 = \langle f, \varphi_{k,\mathbb{H}}^k \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = \overline{\alpha_{k,k}} \Leftrightarrow \alpha_{k,k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Im Weiteren führt nach Theorem 3.9 die Annahme

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_0 f = \partial_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{(2n+3)(n-k)(n+k+1)}{2n+1}} \varphi_{n-1,\mathbb{H}}^k \alpha_{n,k}
\end{aligned}$$

erneut auf eine Orthogonalreihe in allen Kugeln $\mathbb{B}_3(0, r)$ mit $r < 1$, wonach also

$$\partial_0 f = 0 \Leftrightarrow \alpha_{n,k} = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n-1, n \in \mathbb{N}.$$

Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ mit $\partial_0 f = 0$ und $f \perp \varphi_{k,\mathbb{H}}^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ folgert man schließlich, dass $f = 0$. Damit wurde bewiesen, dass die polynomiale Teilmenge $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis im Unterraum $\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}$ ist.

Es sei nun $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^{n-k}\}_{n=k}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis für die Unterräume $(\ker \partial_0^{k+1} \ominus \ker \partial_0^k) \cap \ker \bar{\partial}$, $k = 0, 1, \dots, m$. Nach Induktionsannahme ist zu zeigen, dass für $k = m+1$ die polynomiale Teilmenge $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^{n-m-1}\}_{n=m+1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis im Unterraum $(\ker \partial_0^{m+2} \ominus \ker \partial_0^{m+1}) \cap \ker \bar{\partial}$ ist. Demzufolge sei nun $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ eine Funktion, für welche ferner die Annahmen $f \in (\ker \partial_0^{m+2} \ominus \ker \partial_0^{m+1}) \cap \ker \bar{\partial}$ und $f \perp \varphi_{p,\mathbb{H}}^{p-m-1} \quad \forall p \geq m+1$ getroffen werden. Die erste Annahme impliziert zunächst, dass $\partial_0^{m+2} f = 0$ und $f \perp \ker \partial_0^{m+1} \cap \ker \bar{\partial}$. Dadurch lässt sich die assoziierte Fourierreihe von f auf $f = \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-m-1} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l}$ reduzieren, woraus folgt

$$0 = \langle f, \varphi_{p,\mathbb{H}}^{p-m-1} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = \left\langle \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-m-1} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l}, \varphi_{p,\mathbb{H}}^{p-m-1} \right\rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-m-1} \overline{\alpha_{n,l}} \langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \varphi_{p,\mathbb{H}}^{p-m-1} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} \\
&= \overline{\alpha_{p,p-m-1}} \Leftrightarrow \alpha_{p,p-m-1} = 0 \quad \forall p \geq m+1.
\end{aligned}$$

Insbesondere bedeutet dies, dass f die Form $f = \sum_{n=m+2}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-m-2} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l}$ besitzt. Nach Korollar 3.11 erhält man ferner

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_0^{m+2} f = \partial_0^{m+2} \left[\sum_{n=m+2}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-m-2} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l} \right] \\
&= \sum_{n=m+2}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-m-2} \Pi_{n,l,m} \varphi_{n-m-2,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l},
\end{aligned}$$

wobei der reelle Koeffizient $\Pi_{n,l,m}$ explizit durch

$$\Pi_{n,l,m} = \prod_{j=0}^{m+1} \sqrt{\frac{(2(n-j)+3)(n-j-l)(n-j+l+1)}{2(n-j)+1}}$$

gegeben ist. Die Annahme $\partial_0^{m+2} f = 0$ führt erneut auf eine Orthogonalreihe in allen Kugeln $\mathbb{B}_3(0, r)$ mit $r < 1$, wobei für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\partial_0^{m+2} f = 0 \Leftrightarrow \alpha_{n,l} = 0 \quad \forall l = 0, \dots, n-m-2, n \geq m+2$$

und daher $f = 0$. Somit wurde gezeigt, dass die Polynome $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^{n-m-1}\}_{n=m+1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis im unendlich dimensionalen Teilraum $(\ker \partial_0^{m+2} \ominus \ker \partial_0^{m+1}) \cap \ker \bar{\partial}$ bilden. Aus dem Beweis des Induktionsschrittes folgt dann die Behauptung des Theorems. \square

Bemerkung 3.5. Selbstverständlich lassen sich auf gleichem Wege auch polynomiale Basissysteme für die orthogonale Zerlegung des \mathbb{R} -linearen Hilbert-Raumes

$$L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{n \geq 0} ((\ker \partial_0^{n+1} \ominus \ker \partial_0^n) \cap \ker \bar{\partial})$$

angeben. Die Ansatzsysteme für die orthogonalen Unterräume des \mathbb{R} -linearen Hilbert-Raumes ergeben sich dabei mit Hilfe der Beziehungen des Paragraphen (III) des Theorems 3.7. Dieses Vorgehen wurde bereits für die Konstruktion der \mathbb{H} -linearen Basis verwendet¹. Da beide Orthonormalsysteme elementbezogen die gleichen Ableitungseigenschaften besitzen, lässt sich der Beweis der L^2 -Zerlegung für die \mathbb{R} -lineare Orthonormalbasis analog zum \mathbb{H} -linearen Fall führen, wenngleich sich die Berechnungen aufgrund der feineren Struktur der Basis weitaus umfangreicher gestalten.

¹cf. Kapitel 3.2.5

3.2.8 Stammfunktionen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen

Im Zuge der Konstruktion der vollständigen Orthonormalsysteme in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; K) \cap \ker \bar{\partial}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ wurden im Theorem 3.7 bzw. im Theorem 3.9 zwei Primitivierungsoperatoren \mathcal{P}_K eingeführt, welche als formale Umkehrung der hyperkomplexen Ableitung charakterisiert wurden. Tatsächlich lässt sich durch diese Operatoren für jedes Basiselement in den betrachteten Teilräumen $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}, K)$ eine monogene Stammfunktion erklären. Daher werden zunächst für jeden Operator die strukturellen Eigenschaften der jeweiligen polynomialen Primitiven bezüglich des Unterraumes $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{H}, K)$ untersucht. Des Weiteren soll der zentralen Fragestellung nachgegangen werden, ob sich die Operatoren \mathcal{P}_K auch kontinuierlich auf den ganzen Raum $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; K) \cap \ker \bar{\partial}$ fortsetzen lassen. Hierbei sei besonders darauf hingewiesen, dass bereits in [Cação & Gürlebeck 2006] ähnliche Primitivierungsoperatoren auf der Basis vollständiger Orthonormalsysteme in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; K) \cap \ker \bar{\partial}$ (q.v. [Cação et al. 2004]) definiert wurden, die sich ebenfalls kontinuierlich auf den ganzen Raum fortsetzen ließen. Die hier betrachteten Operatoren \mathcal{P}_K auf der Grundlage der Orthonormalsysteme (3.38) und (3.45) erweitern die Resultate in [Cação & Gürlebeck 2006] um spezielle Struktur- und Orthogonalitätseigenschaften, worauf aber an entsprechender Stelle detaillierter eingegangen wird.

Monogene Stammfunktionen in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$

Zuerst werden die Primitiven des Systems (3.38) betrachtet.

Lemma 3.9. *Das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome*

$$\left\{ \varphi_{0,\mathbb{R}}^k : k = 1, \dots, 4 \right\} \cup \left\{ \left\{ \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_{n,\mathbb{R}}^l : l = 1, \dots, 4n + 4 \right\} \cup \left\{ \varphi_{n+1}^{2^{n+2}}, \varphi_{n+1}^{3^{n+2}}, \varphi_{n+1}^{5^{n+1}}, \varphi_{n+1}^{6^{n+1}} \right\} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

ist eine Orthogonalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$.

Beweis. Nach Teilbehauptung (II) des Theorems 3.7 erhält man durch Anwendung des Operators $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ auf die Elemente der Basis (3.38) ein Orthogonalsystem von $4n + 4$ Polynomen vom Grad $n + 1$, welche außerdem orthogonal zu den monogenen Konstanten $\left\{ \varphi_{n+1}^{2^{n+2}}, \varphi_{n+1}^{3^{n+2}}, \varphi_{n+1}^{5^{n+1}}, \varphi_{n+1}^{6^{n+1}} \right\}$ in $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ sind. Aus der Orthogonalität und $\dim \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{H}, \mathbb{R}) = 4n + 8$ folgt die Vollständigkeit im Teilraum und somit auch die Vollständigkeit in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$. \square

Unter Verwendung des letzten Resultates lässt sich nun für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ eine monogene Stammfunktion wie folgt angeben.

Korollar 3.12. *Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$. Die formale Anwendung des Operators $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ nach Paragraph (II) des Theorems 3.7 auf jede Ansatzfunktion der assoziierten Fourierreihe (3.39) führt auf die Orthogonalreihe*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbb{R}} f = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[p_{n,0} \overset{1}{\varphi}_{n+1}^0 \alpha_n + \sum_{m=1}^{n+1} p_{n,m} \left(\overset{2}{\varphi}_{n+1}^m \beta_{n,m} + \overset{3}{\varphi}_{n+1}^m \gamma_{n,m} \right) \right. \\ & \left. + p_{n,0} \overset{4}{\varphi}_{n+1}^0 \delta_n + \sum_{l=1}^n p_{n,-l} \left(\overset{5}{\varphi}_{n+1}^l \epsilon_{n,l} + \overset{6}{\varphi}_{n+1}^l \eta_{n,l} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

wobei $p_{n,m} = \sqrt{\frac{2n+3}{(2n+5)(n+m+1)(n-m+2)}}$ und $\alpha_n, \beta_{n,m}, \gamma_{n,m}, \delta_n, \epsilon_{n,l}, \eta_{n,l} \in \mathbb{R}$.

Die auf diese Weise konstruierte monogene Stammfunktion lässt sich durch folgende Eigenschaften charakterisieren.

Theorem 3.12. *Für den Primitivierungsoperator $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ und die nach (3.48) definierte monogene Stammfunktion $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} f$ einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ gilt:*

(I) *Der lineare Operator*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial} \longrightarrow L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$$

ist beschränkt und hat die Norm $\|\mathcal{P}_{\mathbb{R}}\| = \sqrt{\frac{3}{10}}$.

(II) *Die Orthogonalreihe $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} f$ konvergiert in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$.*

(III) *Die monogene Stammfunktion $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} f$ ist orthogonal zum Teilraum der monogenen Konstanten in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$, also*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} f \perp (\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}) \subset (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}).$$

Beweis. Durch Anwendung der Parsevalschen Gleichung (3.40) auf die Orthogonalreihe (3.48) erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(p_{n,0})^2 |\alpha_n|^2 + \sum_{m=1}^{n+1} (p_{n,m})^2 (|\beta_{n,m}|^2 + |\gamma_{n,m}|^2) \right. \\ \left. + (p_{n,0})^2 |\delta_n|^2 + \sum_{l=1}^n (p_{n,-l})^2 (|\epsilon_{n,l}|^2 + |\eta_{n,l}|^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Für diese Reihe ist nun die Konvergenz zu zeigen, indem im ersten Schritt die reellen Koeffizienten durch

$$\begin{aligned}\max_{n \in \mathbb{N}_0} (p_{n,0})^2 &= \max_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{2n+3}{(2n+5)(n+1)(n+2)} \leq \frac{3}{10}, \\ \max_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\max_{m=1, \dots, n+1} (p_{n,m})^2 \right) &= \max_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\max_{m=1, \dots, n+1} \frac{2n+3}{(2n+5)(n+m+1)(n-m+2)} \right) \leq \frac{3}{10}, \\ \max_{n \in \mathbb{N}} \left(\max_{l=1, \dots, n} (p_{n,-l})^2 \right) &= \max_{n \in \mathbb{N}} \left(\max_{l=1, \dots, n} \frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)} \right) \leq \frac{5}{28}\end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}& \sum_{n=0}^{\infty} \left[(p_{n,0})^2 |\alpha_n|^2 + \sum_{m=1}^{n+1} (p_{n,m})^2 (|\beta_{n,m}|^2 + |\gamma_{n,m}|^2) \right. \\ & \quad \left. + (p_{n,0})^2 |\delta_n|^2 + \sum_{l=1}^n (p_{n,-l})^2 (|\epsilon_{n,l}|^2 + |\eta_{n,l}|^2) \right] \\ & \leq \frac{3}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\alpha_n|^2 + \sum_{m=1}^{n+1} (|\beta_{n,m}|^2 + |\gamma_{n,m}|^2) + |\delta_n|^2 + \sum_{l=1}^n (|\epsilon_{n,l}|^2 + |\eta_{n,l}|^2) \right] \\ & \leq \frac{3}{10} \|f\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}^2.\end{aligned}$$

Damit ist die Reihe (3.49) in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ konvergent und folglich $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$. Außerdem wurde bewiesen, dass

$$\|\mathcal{P}_{\mathbb{R}} f\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} \leq \sqrt{\frac{3}{10}} \|f\|_{L^2(\mathbb{B}_3)},$$

was wegen

$$\left\| \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \varphi_0^1 \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} = \sqrt{\frac{3}{10}} \left\| \varphi_1^1 \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

eine scharfe Abschätzung ist und der Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ demzufolge die Norm $\sqrt{\frac{3}{10}}$ besitzt.

Da die $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ -Primitiven orthogonal zu den monogenen Konstanten stehen und ferner die Menge der monogenen Konstanten aufgrund des L^2 -Zerlegungssatzes eine Basis im unendlich dimensionalen Teilraum $\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}$ ist, folgt damit auch der Beweis der Teilbehauptung (III) des Theorems. \square

Bemerkung 3.6. In [Cação & Gürlebeck 2006] konnte für die in diesem Fall nicht orthogonale Reihe ebenfalls eine scharfe Abschätzung erhalten werden, wobei die Norm des reellen Primitivierungsoperators mit $\sqrt{\frac{2}{5}}$ angegeben wurde. Folglich wurde dieses Resultat durch das hier betrachtete System geringfügig verbessert. Außerdem sei bemerkt, dass die in [Cação & Gürlebeck 2006] konstruierten Primitiven nicht

orthogonal zu den Konstanten sind, was eine explizite Unterscheidung von Stammfunktion und Integrationskonstante unmöglich macht. In den meisten praktischen Anwendungen ist eine solche Unterscheidung jedoch von besonderem Interesse. Im nächsten Abschnitt wird dieser wesentliche Vorteil der hier konstruierten Systeme anhand der \mathbb{H} -linearen Stammfunktion näher ausgeführt.

Monogene Stammfunktionen in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$

Bei der Konstruktion monogener Stammfunktionen in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ ist eine Vorgehensweise analog zum \mathbb{R} -linearen Fall möglich, weshalb im Folgenden nur einige Resultate ausführlich bewiesen werden.

Lemma 3.10. *Das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome*

$$\left\{ \left\{ \mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^k \right\} \cup \left\{ \varphi_{n,\mathbb{H}}^n \right\} : k = 0, \dots, n \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

ist eine Orthogonalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.

Analog lässt sich nun für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ eine monogene Stammfunktion erklären.

Korollar 3.13. *Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$. Die formale Anwendung des Operators $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}$ nach Paragraph (II) des Theorems 3.9 auf jede Ansatzfunktion der assoziierten Fourierreihe (3.46) führt auf die Orthogonalreihe*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}} f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sqrt{\frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)}} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l}, \quad (3.50)$$

wobei $\alpha_{n,l} \in \mathbb{H}$.

Diese wird durch das folgende Theorem näher charakterisiert.

Theorem 3.13. *Für den Primitivierungsoperator $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}$ und die nach (3.50) definierte monogene Stammfunktion $\mathcal{P}_{\mathbb{H}} f$ einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ gilt:*

(1) *Der lineare Operator*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}} : L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial} \longrightarrow L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$$

ist beschränkt und hat die Norm $\|\mathcal{P}_{\mathbb{H}}\| = \sqrt{\frac{3}{10}}$.

(II) Die Orthogonalreihe $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}f$ konvergiert in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.

(III) Die monogene Stammfunktion $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}f$ ist orthogonal zum Teilraum der monogenen Konstanten in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, also

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}}f \perp (\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}) \subset (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}).$$

Beweis. Es werden nur die Teilbehauptungen (I) und (II) gezeigt. Die Anwendung der Parsevalschen Gleichung nach Korollar 3.10 auf die Darstellung (3.50) ergibt zunächst

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)} |\alpha_{n,l}|^2. \quad (3.51)$$

Nun wird abgeschätzt, dass

$$\max_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\max_{l=0, \dots, n} \frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)} \right) \leq \frac{3}{10}$$

und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)} |\alpha_{n,l}|^2 \leq \frac{3}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n |\alpha_{n,l}|^2.$$

Folglich konvergiert die Reihe (3.51) in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ und damit $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$. Außerdem wurde gezeigt, dass

$$\|\mathcal{P}_{\mathbb{H}}f\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} \leq \sqrt{\frac{3}{10}} \|f\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}, \quad f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial},$$

wonach also der betrachtete Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}$ beschränkt ist. Als direkte Konsequenz aus der ersten Gleichung in (3.45) folgt

$$\|\mathcal{P}_{\mathbb{H}}\varphi_{0,\mathbb{H}}^0\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} = \sqrt{\frac{3}{10}} \|\varphi_{1,\mathbb{H}}^0\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} = \sqrt{\frac{3}{10}},$$

was bedeutet, dass die Abschätzung scharf ist und der Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}$ die Norm $\sqrt{\frac{3}{10}}$ hat. □

Bemerkung 3.7. Bekanntlich können sich verschiedene \mathbb{H} -holomorphe Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ nur durch eine monogene Konstante $\gamma \in \ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}$ (cf. Theorem 2.3) unterscheiden. Aufgrund der Tatsache, dass die hier konstruierte Stammfunktion orthogonal auf der Teilmenge $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ steht, welche ferner nach Theorem 3.11 eine Orthonormalbasis im

Teilraum $\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}$ ist, lässt sich die monogene Konstante eindeutig in dieser Orthonormalbasis durch

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,\mathbb{H}}^n \alpha_{n,n}$$

angeben. Im Vergleich zu ähnlichen Konstruktionen (e.g. [Cação & Gürlebeck 2006]) liegt die besondere Qualität dieser \mathbb{H} -holomorphen Stammfunktion also darin, dass die eigentliche Stammfunktion und die monogene Konstante explizit separiert werden können. In ganz natürlicher Weise lässt sich nun völlig analog zu \mathbb{R} oder \mathbb{C} eine formale Integration erklären, bei welcher der Lösungsraum der Stammfunktion orthogonal zum Lösungsraum der Integrationskonstante steht.

Abschließend soll erneut die Analogie zur komplexen Theorie hergestellt werden. Dazu wird auf der (orthogonalen) Basis $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ ein holomorpher Primitivierungsoperator \mathcal{P}_z definiert, so dass für ein beliebiges Basiselement

$$\mathcal{P}_z z^n = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \quad \text{und} \quad \partial_z [\mathcal{P}_z z^n] = z^n$$

gilt. Betrachtet man nun die Fourierreihe einer \mathbb{C} -wertigen quadratisch integrierbaren holomorphen Funktion f bezüglich der normierten Basis $\{\tilde{z}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, so zeigt sich, dass die kontinuierliche Erweiterung des \mathcal{P}_z -Operators auf den ganzen Raum $L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ zu der konvergenten Orthogonalreihe

$$\mathcal{P}_z f = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \tilde{z}^{n+1} \beta_n$$

führt. Wie zu erwarten war, besteht auch hier eine sehr starke Ähnlichkeit zur \mathbb{H} -holomorphen Darstellung (3.50). Außerdem folgert man leicht, dass der lineare Operator

$$\mathcal{P}_z : L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial} \longrightarrow L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$$

beschränkt ist und die Norm $\|\mathcal{P}_z\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ besitzt.

3.2.9 Monogene Appell-Systeme und Taylorentwicklung

Wie bereits mehrfach angedeutet, lassen sich nun mit Hilfe der \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis (3.45) weitaus tieferliegende funktionentheoretische Erkenntnisse gewinnen. Von grundlegender Bedeutung sind dabei die in den vorangegangenen Abschnitten gezeigten Struktureigenschaften² der Orthonormalbasis, wonach die hyperkomplexe Ableitung bzw. die Primitive einer Basisfunktion erneut auf ein Vielfaches einer anderen Basisfunktion (der gleichen Basis) führt. Diese allgemeine Möglichkeit der Charakterisierung eines polynomialen Funktionensystems wurde bereits im Jahre 1880 durch P.É. APPELL [Appell 1880] angegeben. Danach wird ein System $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ als *Appell-System* bezeichnet, wenn für die Elemente die Beziehungen $\frac{d}{dx}P_n(x) = nP_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$ gelten. Dieser Ansatz wurde seitdem von vielen Autoren aufgegriffen und auf zahlreiche Funktionensysteme verallgemeinert. Besonders erwähnt werden soll hier nur der Zugang von I.M. SHEFFER, welcher in [Sheffer 1945] auf der Grundlage einer erzeugenden Funktion eine Vielzahl äquivalenter Definitionen³ eines Appell-Systems angeben konnte. Andere theoretische Anwendungsbereiche, welche diese ursprüngliche Idee von P.É. APPELL auf formaler Ebene aufgreifen, finden sich beispielsweise in der Funktionalanalysis oder in rein algebraischen Konzepten. Im Rahmen dieser Arbeit werden sich die Ausführungen jedoch im Wesentlichen auf die Verallgemeinerung der bereits eingeführten analytischen Relation $\frac{d}{dx}P_n(x) = nP_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$ und auf das Auffinden kompakter Rekursionsbeziehungen beschränken. Den Ausgangspunkt für die räumliche Betrachtungen stellt dabei die komplexe Orthogonalbasis $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dar, welche die Appell-Eigenschaft $\partial_z z^n = nz^{n-1}$ in natürlicher Weise besitzt. Zieht man nun die strukturelle Analogie der hier konstruierten Orthonormalbasis zur komplexen Basis in Betracht, so stellt sich zwangsläufig die Frage nach der Verallgemeinerung der Appell-Eigenschaft auf die Klasse der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome.

Diese Idee wurde zuerst von H.R. MALONEK ET AL. in den Arbeiten [Cação & Malonek 2006, Falcão et al. 2006, Falcão & Malonek 2007, Malonek & Falcão 2007] aufgegriffen. Dort definierten die Autoren ein System von homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynomen $P_k(x)$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, mit der Eigenschaft $\partial_0 P_k(x) = kP_{k-1}(x)$. Unter Verwendung dieser Polynome konnten ferner einige grundlegende Elementarfunktionen definiert sowie kombinatorische Identitäten berechnet werden. Obwohl

²cf. Theorem 3.9

³wie etwa die Erfüllung spezieller Rekursionsbeziehungen

das System $\{P_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ alle gewünschten Eigenschaften besitzt, ist es dennoch nicht vollständig, da es bekanntermaßen zu jedem Grad mehr als ein linear unabhängiges Polynom gibt. Unlängst konnte nun in [Cação & Malonek 2008] ein orthogonales Appell-System für den reell-linearen Unterraum $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}$ quadratisch integrierbarer monogener Funktionen auf der Einheitskugel \mathbb{B}_3 konstruiert werden. Neben diesen Betrachtungen wurde in [Gürlebeck 2008] außerdem gezeigt, dass zwischen den Appell-Systemen, der komplexen und der hyperkomplexen Analysis tiefere Beziehungen existieren. Dort wurde bewiesen, dass in Clifford-Algebren, die durch eine ungerade Anzahl von Basisvektoren erzeugt werden, die Appell-Polynome aus [Cação & Malonek 2006, Falcão et al. 2006, Falcão & Malonek 2007, Malonek & Falcão 2007] gerade die *Fueter-Sce-Erweiterungen* der komplexen Monome z^n sind.

Das Ziel dieses Abschnitts ist daher, die bekannten Resultate auf den \mathbb{H} -linearen Fall zu erweitern und ausgehend von der Orthonormalbasis (3.45) ein in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ vollständiges orthogonales Appell-System zu konstruieren sowie dessen strukturelle Eigenschaften zu studieren. Demzufolge sei nun $\check{A}_n(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ ein Polynom vom Grad n in den Variablen x, y, z . Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist eine spezielle Klasse monogener Appell-Polynome, deren Elemente durch die Beziehungen

$$\partial_0 \check{A}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \partial_0 \check{A}_n = n \check{A}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.52)$$

charakterisiert werden. Wie sich anhand der Abbildung 3.3 unschwer erkennen lässt, besitzt die Orthonormalbasis (3.45) bis auf einen reellen Normierungsfaktor bereits die Eigenschaften eines Appell-Systems (3.52). Folgt man daher dem klassischen Konstruktionsprinzip für Appell-Systeme in \mathbb{R} , so erhält man die Polynome höheren Grades durch schrittweise Integration der Polynome von niederem Grad. Durch die im vorangegangenen Abschnitt erhaltenen Resultate lässt sich nun auch die Integration völlig analog zur Konstruktion reeller Appell-Systeme betrachten. Daher sei zunächst an die nach Paragraph (II) des Theorems 3.9 gegebene $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}$ -Primitive eines beliebigen Basiselements

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l = \gamma_{n,l} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l, \quad l = 0, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

erinnert, wobei $\gamma_{n,l} = \sqrt{\frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)}}$. Außerdem sei $\mathbf{c}_n = \sum_{i=0}^3 c_n^i \mathbf{e}_i$, $c_n^i \in \mathbb{R}$ die \mathbb{H} -wertige reelle Konstante, welche dem Polynom vom Grad n zugeordnet ist. Im ersten Schritt der Konstruktion wird nun das Appell-Polynom vom Grad 0 mit $\check{A}_0 =$

$\varphi_{0,\mathbb{H}}^0 \mathbf{c}_0$ identifiziert. Durch schrittweise Primitivierung, beginnend mit \check{A}_0 , ergibt sich

$$\begin{aligned}
\check{A}_1 &= 1 \mathcal{P}_{\mathbb{H}} \check{A}_0 &= 1 [\gamma_{0,0} \varphi_{1,\mathbb{H}}^0 \mathbf{c}_0 + \varphi_{1,\mathbb{H}}^1 \mathbf{c}_1] \\
\check{A}_2 &= 2 \mathcal{P}_{\mathbb{H}} \check{A}_1 &= 2 \cdot 1 [\gamma_{0,0} \gamma_{1,0} \varphi_{2,\mathbb{H}}^0 \mathbf{c}_0 + \gamma_{1,1} \varphi_{2,\mathbb{H}}^1 \mathbf{c}_1 + \varphi_{2,\mathbb{H}}^2 \mathbf{c}_2] \\
\check{A}_3 &= 3 \mathcal{P}_{\mathbb{H}} \check{A}_2 &= 3 \cdot 2 \cdot 1 [\gamma_{0,0} \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \varphi_{3,\mathbb{H}}^0 \mathbf{c}_0 + \gamma_{1,1} \gamma_{2,1} \varphi_{3,\mathbb{H}}^1 \mathbf{c}_1 \\
&&+ \gamma_{2,2} \varphi_{3,\mathbb{H}}^2 \mathbf{c}_2 + \varphi_{3,\mathbb{H}}^3 \mathbf{c}_3] \\
&\vdots \\
\check{A}_n &= n \mathcal{P}_{\mathbb{H}} \check{A}_{n-1} &= n! \sum_{l=0}^n \prod_{j=l}^{n-1} \gamma_{j,l} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \mathbf{c}_l \\
&&= n! \sum_{l=0}^n \sqrt{\frac{(2l+3)(2l+1)!}{(2n+3)(n+l+1)!(n-l)!}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \mathbf{c}_l.
\end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass in jedem Integrationsschritt n das Polynom $\varphi_{n,\mathbb{H}}^n \mathbf{c}_n \in \ker \partial \cap \ker \bar{\partial}$ als Integrationskonstante mit gleichem polynomialen Grad addiert wird, was methodisch gesehen vollkommen analog zum reellen Vorgehen ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ wird nun durch

$$\check{A}_n^l := n! \sqrt{\frac{(2l+3)(2l+1)!}{(2n+3)(n+l+1)!(n-l)!}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \quad l = 0, \dots, n \quad (3.53)$$

das Appell-Polynom vom Grad n bezeichnet, welches dem Koeffizienten \mathbf{c}_l zuzuordnen ist.

Theorem 3.14. *Das System homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome $\{\check{A}_n^l : l = 0, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine vollständige orthogonale Appell-Menge in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\partial_0 \check{A}_n^l = \begin{cases} n \check{A}_{n-1}^l & : l = 0, \dots, n-1, \\ 0 & : l = n. \end{cases}$$

Beweis. Nach Konstruktion ist die Eigenschaft eines Appell-Systems automatisch erfüllt. Da außerdem jedes Appell-Polynom (3.53) bis auf einen reellen Faktor einem einzelnen Element der Orthonormalbasis (3.45) entspricht, folgt damit auch die Orthogonalität und Vollständigkeit der Appell-Menge. \square

Bevor nun dieses Appell-System für weitere Anwendungen genutzt wird, sollen zunächst einige strukturelle Besonderheiten der monogenen Appell-Menge (3.53) erläutert werden. Betrachten wir dazu die Abbildung 3.4. Zuerst lässt sich feststellen, dass wie auch im Ausgangssystem (3.45) die polynomiale Teilmenge $\{\check{A}_n^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Menge der monogenen Konstanten darstellt und nur das Polynom \check{A}_0^0 eine \mathbb{H} -wertige Konstante mit reellen Koordinaten ist. Alle anderen Polynome in dieser Teilmenge

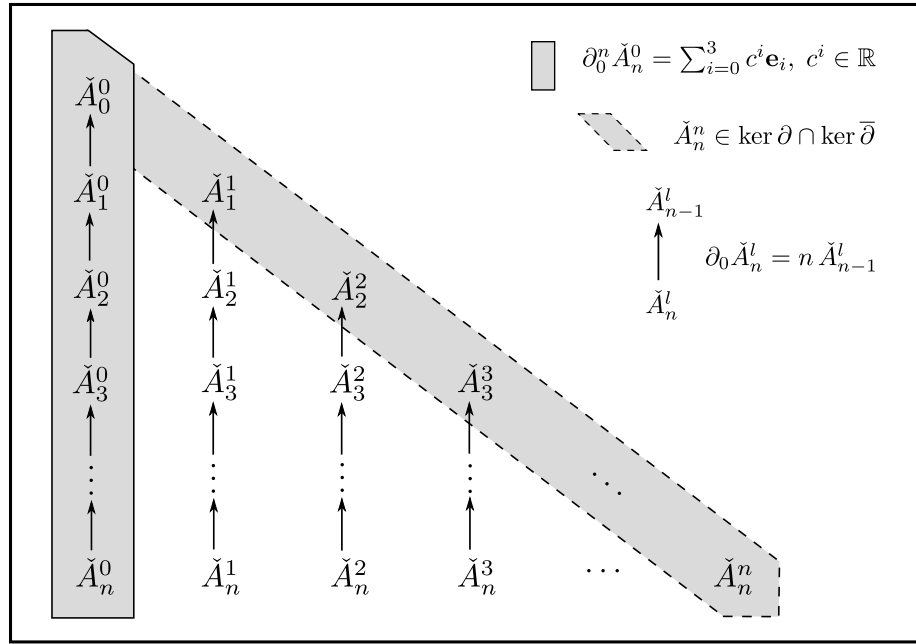


Abbildung 3.4: Strukturelle Eigenschaften der Appell-Polynome \check{A}_n^l .

sind als \mathbb{H} -wertige monogene Funktionen in den Variablen y, z charakterisiert. Eine zweite wichtige Eigenschaft des Appell-Systems ist dadurch gegeben, dass nach Konstruktion die Appell-Polynome einer jeden Spalte im Strukturschema⁴ mit einem \mathbb{H} -wertigen Koeffizienten \mathbf{c}_n multipliziert werden können, ohne die Appell-Eigenschaft zu verlieren.

Schließlich sei auf eine letzte Besonderheit des Appell-Systems hingewiesen, wonach die n -fache Anwendung der hyperkomplexen Ableitung ∂_0 auf das Appell-Polynom \check{A}_n^0 , $n \in \mathbb{N}_0$ immer auf eine \mathbb{H} -wertige Konstante mit reellen Koordinaten führt. Betrachtet man daher eine Reihendarstellung mit Hilfe der Appell-Basis, so lassen sich durch diese differentiellen Beziehungen die Koeffizienten der Polynome in der ersten Spalte von Abbildung 3.4 eindeutig bestimmen. Nach Paragraph

⁴cf. Abbildung 3.4

(III) des Theorems 3.9 trifft dies jedoch nicht auf die anderen Appell-Polynome $\{\check{A}_n^l : l = 1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu, da deren n -fache Ableitung verschwindet. Möchte man auch Aussagen über diese Koeffizienten machen, so ist eine verallgemeinerte Sichtweise dieser Grundidee notwendig. Den Ansatz hierfür liefert die Beobachtung, dass die $(n - l)$ -fache hyperkomplexe Ableitung eines beliebigen Appell-Polynoms \check{A}_n^l in jedem Fall auf eine monogene Konstante vom Grad l führt. Auf der Grundlage dieser sehr wesentlichen Erkenntnis stellt sich die Frage, ob es möglich ist, einen monogenen Differentialoperator in den Variablen y, z zu definieren, welcher eine monogene Konstante vom Grad l erneut auf eine monogene Konstante vom Grad $l - 1$ abbildet. In diesem Zusammenhang ist es ferner von Interesse, ob sich bei festem $l \leq n$ für jede Teilmenge $\{\check{A}_n^l\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Normalisierungsfaktor finden lässt, so dass die Anwendung des reduzierten Differentialoperators die Appell-Eigenschaft nicht verletzt.

Ausgehend vom ersten Appell-Polynom \check{A}_0^0 werden die Polynome höheren Grades konstruiert. Um dabei komplizierte Koeffizienten zu vermeiden, ist es zweckmäßiger, mit den unnormierten homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynomen (3.14) zu arbeiten. Zuerst wird also gefordert, dass $A_0^0 = 1$ ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich daraus sofort

$$A_n^0 = \frac{2}{n+1} X_{n,0}^{0,\dagger}.$$

Nun wird die Teilmenge $\{\check{A}_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ betrachtet. Zur besseren Veranschaulichung lässt sich in kartesischer Darstellung für jedes $l \in \mathbb{N}$ und $l = n$ die wichtige Beziehung

$$X_{n,0}^{n,\dagger} - Y_{n,3}^{n,\dagger} = \frac{(n+l+1)!}{2^{l+1} n!} (y - z\mathbf{e}_3)^l$$

zeigen. Infolge dessen wird der gesuchte Differentialoperator durch

$$\bar{\partial}_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

definiert. Außerdem soll für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Appell-Eigenschaft $\bar{\partial}_c A_n^n = n A_{n-1}^{n-1}$ gelten. Letztendlich führen diese Überlegungen auf die Beziehung

$$A_n^l = \frac{2^{l+1} n!}{(n+l+1)!} \left(X_{n,0}^{l,\dagger} - Y_{n,3}^{l,\dagger} \right), \quad l = 1, \dots, n,$$

wodurch man zusammenfassend für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein monogenes Appell-System

$$\left. \begin{aligned} A_n^0 &= \frac{2}{n+1} X_{n,0}^{0,\dagger}, \\ A_n^l &= \frac{2^{l+1} n!}{(n+l+1)!} \left(X_{n,0}^{l,\dagger} - Y_{n,3}^{l,\dagger} \right), \quad l = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

erhält. Dieses wird durch das folgende Theorem näher charakterisiert.

Theorem 3.15. *Das System homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome $\{A_n^l : l = 0, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine vollständige orthogonale Appell-Menge in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\partial_0 A_n^l = \begin{cases} n A_{n-1}^l & : l = 0, \dots, n-1, \\ 0 & : l = n \end{cases}$$

und

$$\bar{\partial}_c A_n^n = n A_{n-1}^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Beweis. Der Beweis folgt nach Konstruktion. □

Anhand der Abbildung 3.5 sollen die Abbildungseigenschaften der Differentialoperatoren ∂_0 und $\bar{\partial}_c$ in Bezug auf die Appell-Basis (3.54) noch einmal verdeutlicht werden. Rein qualitativ ist zunächst zu erkennen, dass die Anwendung des Operators

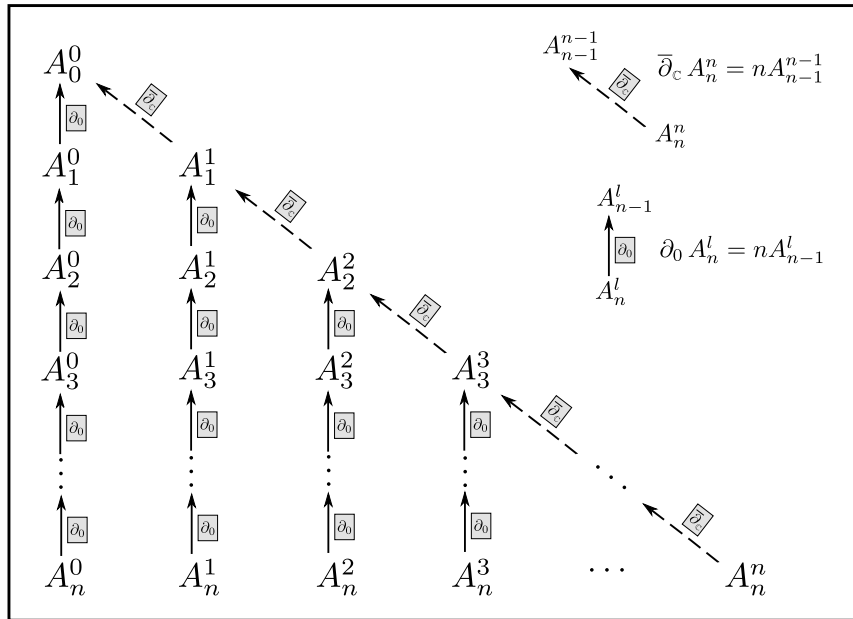


Abbildung 3.5: Abbildungseigenschaften der Differentialoperatoren ∂_0 und $\bar{\partial}_c$.

∂_0 auf ein beliebiges Appell-Polynom A_n^l zu einer Verminderung des Polynomgrades bezüglich einer festen Spalte l führt, wobei hingegen der Operator $\bar{\partial}_c$ einen Versatz sowohl im Grad als auch bezüglich der Spalte bewirkt. Zu beachten ist dabei, dass

sich die genannten Abbildungseigenschaften des Operators $\bar{\partial}_c$ ausschließlich auf die Teilmenge der monogenen Konstanten⁵ beschränken.

Auf der Grundlage dieser strukturellen Eigenschaften des Appell-Systems lässt sich nun eine wichtige Folgerung ableiten.

Korollar 3.14. *Für ein beliebiges Appell-Polynom A_n^l des Systems (3.54) führt die $(n-l)$ -fache Anwendung des Operators ∂_0 und die anschließende l -fache Anwendung des Operators $\bar{\partial}_c$ auf*

$$\bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} A_n^l = n!,$$

wobei $l = 0, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Im Hinblick auf eine Reihendarstellung mit Hilfe der Appell-Basis (3.54) sei im Zusammenhang mit Korollar 3.14 angemerkt, dass sowohl die linksseitige Anwendung der Operatoren als auch deren Anwendungsreihenfolge zu beachten sind. Würde man beispielsweise $\bar{\partial}_c^l$ als rechtsseitigen Operator betrachten, so ließe sich die Appell-Eigenschaft zwar auch auf den Nebendiagonalen zeigen, gleichzeitig würde aber auch die \mathbb{H} -rechts-Linearität der Reihe verloren gehen. Diese ist jedoch eine wesentliche Grundvoraussetzung für die folgende Potenzreihenentwicklung.

Definition 3.4 (Taylorreihe in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$). Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$. Die Orthogonalreihe

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n A_n^l \mathbf{t}_{n,l}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_{n,l} = \frac{1}{n!} \bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (3.55)$$

heißt *verallgemeinerte Taylorreihe* in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, wobei ∂_0^0 bzw. $\bar{\partial}_c^0$ die Identität bezeichnet.

Dass diese Reihendarstellung als verallgemeinerte Taylorreihe in \mathbb{H} betrachtet werden kann, verdeutlicht die Auswertung des linearen Terms. Es sei durch $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^3 f^i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$ eine beliebige monogene Funktion in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ gegeben. Für den linearen Term der zugehörigen Taylorreihe von f ergibt sich dann

$$T_1 = A_1^0 \bar{\partial}_c^0 \partial_0^1 f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + A_1^1 \bar{\partial}_c^1 \partial_0^0 f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = A_1^0 \partial_0 f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + A_1^1 \bar{\partial}_c f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}. \quad (3.56)$$

Vereinfachend wird zunächst bezeichnet:

$$\frac{\partial f_{(0)}^i}{\partial x} := \frac{\partial f^i(\mathbf{x})}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}, \quad \frac{\partial f_{(0)}^i}{\partial y} := \frac{\partial f^i(\mathbf{x})}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}, \quad \frac{\partial f_{(0)}^i}{\partial z} := \frac{\partial f^i(\mathbf{x})}{\partial z} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}},$$

⁵obere Diagonale der Abbildung 3.5

mit $i = 0, 1, 2, 3$. Unter Beachtung der Monogenität von f ergibt die koordinatenweise Auswertung von T_1 für den Skalarteil

$$\begin{aligned} [T_1]_0 &= \frac{x}{2} \left(\frac{\partial f_{(0)}^0}{\partial x} + \frac{\partial f_{(0)}^1}{\partial y} + \frac{\partial f_{(0)}^2}{\partial z} \right) + \frac{y}{4} \left(3 \frac{\partial f_{(0)}^0}{\partial y} - \frac{\partial f_{(0)}^1}{\partial x} - \frac{\partial f_{(0)}^3}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{z}{4} \left(3 \frac{\partial f_{(0)}^0}{\partial z} - \frac{\partial f_{(0)}^2}{\partial x} + \frac{\partial f_{(0)}^3}{\partial y} \right) \\ &= x \frac{\partial f_{(0)}^0}{\partial x} + y \frac{\partial f_{(0)}^0}{\partial y} + z \frac{\partial f_{(0)}^0}{\partial z}. \end{aligned}$$

Analog erhält man für die vektoriellen Anteile die Beziehungen

$$[T_1]_i = x \frac{\partial f_{(0)}^i}{\partial x} + y \frac{\partial f_{(0)}^i}{\partial y} + z \frac{\partial f_{(0)}^i}{\partial z}, \quad i = 1, 2, 3$$

und damit

$$T_1 = x \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + y \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + z \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}.$$

Der lineare Term (3.56) der hier konstruierten Taylorreihe (3.55) korrespondiert folglich zur hyperkomplexen Linearisierung⁶ und ist damit identisch zu dem der bekannten Taylorreihe (3.6) bezüglich der verallgemeinerten Potenzen. Außerdem lässt sich anhand des linearen Terms (3.56) und für den allgemeinen Fall anhand der Taylorkoeffizienten $\frac{1}{n!} \bar{\partial}_{\mathbb{C}}^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$ eine weitere wichtige Eigenschaft der Reihe ableiten, welche den formalen Zusammenhang zu den Taylorreihen in \mathbb{R} und \mathbb{C} verdeutlicht. Wie in Abbildung 3.5 dargestellt, wirkt die hyperkomplexe Ableitung auf den Hauptteil der Funktion f , also dem Anteil der Funktion, welcher orthogonal zu den hyperholomorphen Konstanten ist. In \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} korrespondiert der Hauptteil der Funktion ebenfalls zur Ableitung des jeweiligen Funktionenraumes, welcher sich in diesen beiden Fällen jedoch nur um eine reelle bzw. komplexe Konstante von der Ausgangsfunktion unterscheidet. Der eingeführte Cauchy-Riemann-Typ Operator $\bar{\partial}_{\mathbb{C}}$ wirkt dann als Ableitung bezüglich des konstanten Anteils der Funktion. Eine Entsprechung dieses Operators in \mathbb{R} oder \mathbb{C} existiert ebenfalls, ordnet sich aber in die jeweilige Struktur ein, da beispielsweise im Komplexen die Beziehung $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_z$ gilt. Demzufolge verallgemeinert die hier angegebene Taylorreihe (3.55) die bekannten reellen bzw. komplexen Darstellungen dahin gehend, dass nun auch der zentrale Differentialoperator ∂_0 der Klasse der \mathbb{H} -holomorphen Funktionen zur Beschreibung der Reihe verwendet wird. Im Gegensatz dazu sei an die Taylorreihe bezüglich der

⁶cf. Kapitel 2.2.3

verallgemeinerten Potenzen (3.6) erinnert. Hier berechnen sich die Taylorkoeffizienten aus den partiellen Ableitungen nach y, z . Die hyperkomplexe Ableitung tritt dabei nicht explizit auf.

An dieser Stelle soll noch einmal auf die wichtige Eigenschaft der Taylorreihe (3.55) als Orthogonalreihe eingegangen werden, was also bedeutet, dass alle Summanden der Taylorreihe eine Orthogonalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ bilden. Analog zum Komplexen stellt sich daher die Frage, ob sich für eine monogene Funktion f zwischen den Taylorkoeffizienten und den Koeffizienten der zugeordneten Fourierreihe ein direkter Zusammenhang herstellen lässt. Dazu sollen sowohl die Fourierreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l}, \quad \alpha_{n,l} = \int_{\mathbb{B}_3} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l} f dV$$

als auch die Taylorreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n A_n^l \mathbf{t}_{n,l}, \quad \mathbf{t}_{n,l} = \frac{1}{n!} \bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=0}$$

einer beliebigen monogenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ betrachtet werden. Nach Konstruktion sind die Appell-Polynome bis auf einen \mathbb{H} -wertigen Faktor äquivalent zu einzelnen Elementen der Orthonormalbasis. Damit lässt sich der Zusammenhang zwischen den Fourier- und Taylorkoeffizienten wie folgt herstellen. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $l = 0, \dots, n$ wird die Relation

$$\varphi_{n,\mathbb{H}}^l \alpha_{n,l} = A_n^l \mathbf{t}_{n,l}$$

betrachtet. Für den Sonderfall $l = 0$ berechnet man zunächst

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger} \alpha_{n,0} &\stackrel{!}{=} \frac{2}{n+1} X_{n,0}^{0,\dagger} \mathbf{t}_{n,0} = \frac{2 \left\| X_{n,0}^{0,\dagger} \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}{n+1} \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger} \mathbf{t}_{n,0} \\ \Leftrightarrow \alpha_{n,0} &= \frac{2 \left\| X_{n,0}^{0,\dagger} \right\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}}{n+1} \mathbf{t}_{n,0} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{(2n+3)(n+1)}} \mathbf{t}_{n,0}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für $l = 1, \dots, n$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n+1}{2(n-l+1)}} \left(\tilde{X}_{n,0}^{l,\dagger} - \tilde{Y}_{n,3}^{l,\dagger} \right) \alpha_{n,l} &= \frac{2^{l+1} n!}{(n+l+1)!} \left(X_{n,0}^{l,\dagger} - Y_{n,3}^{l,\dagger} \right) \mathbf{t}_{n,l} \\ \Leftrightarrow \alpha_{n,l} &= 2^{l+1} n! \sqrt{\frac{\pi}{(2n+3)(n-l)!(n+l+1)!}} \mathbf{t}_{n,l}. \end{aligned}$$

Da der Fall $l = 0$ in der letzten Gleichung enthalten ist, lässt sich schließlich für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $l = 0, \dots, n$ das wichtige Resultat

$$\alpha_{n,l} = 2^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{(2n+3)(n-l)!(n+l+1)!}} \bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \quad (3.57)$$

angeben, wodurch nun jeder Fourierkoeffizient einer Funktion $f(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ durch einen zugehörigen Taylorkoeffizienten ausgedrückt werden kann. Außerdem folgt daraus, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der Zusammenhang zwischen den Elementen der \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis (3.45) und den Elementen der Appell-Basis (3.54) explizit durch die Beziehung

$$A_n^l = 2^{l+1} n! \sqrt{\frac{\pi}{(2n+3)(n-l)!(n+l+1)!}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \quad l = 0, \dots, n \quad (3.58)$$

gegeben ist, was eine Transformation der Basissysteme auf direktem Weg ermöglicht. Selbstverständlich lässt sich auch hier die Ähnlichkeit zum Komplexen zeigen. Dazu wird für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_2; \mathbb{C}) \cap \ker \bar{\partial}$ die komplexe Taylorreihe in der Form

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{z}^n \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \partial_z^n f(z) \Big|_{z=\mathbf{0}}$$

sowie die Fourierreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{z}^n \beta_n$ betrachtet. Wie man leicht einsieht, ist der Zusammenhang zwischen den komplexen Fourier- und Taylorkoeffizienten für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch die Beziehung

$$\beta_n = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \partial_z^n f(z) \Big|_{z=\mathbf{0}}$$

gegeben. Beschränkt man sich im hyperkomplexen Zugang (3.57) auf den Fall $l = 0$, so ergibt sich

$$\alpha_{n,0} = \frac{2}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{(2n+3)(n+1)}} \partial_0^n f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

und damit eine deutliche Analogie zum Komplexen.

3.2.10 Rekursionsformeln für die monogenen Basissysteme

Im Hinblick auf die praktische Handhabbarkeit sowie auf eine effiziente Implementierung der im Vorangegangenen entwickelten polynomialen Systeme sind ferner eventuelle Rekursionsbeziehungen zwischen den Basiselementen von Interesse. Im Weiteren wird sich außerdem zeigen, dass solche Beziehungen auch für die Betrachtungen

im Außengebiet sehr vorteilhaft sind. In Vorbereitung der nachfolgenden Berechnungen wird zunächst die kompakte Darstellung der Appell-Basis (3.54) explizit in Kugelkoordinaten benötigt. Für den Fall $l = 0$ erhält man unter Verwendung der Beziehung (3.15) sofort

$$r^n A_n^0(\boldsymbol{\omega}) = \frac{2r^n}{n+1} [\mathbf{A}^{0,n} + \mathbf{B}^{0,n} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \mathbf{B}^{0,n} \sin \varphi \mathbf{e}_2]. \quad (3.59)$$

Für die Basiselemente A_n^l , $l = 1, \dots, n$ wird zuerst der sphärische Anteil ausgewertet. Mit (3.16) und (3.17) ergibt sich

$$\begin{aligned} X_{n,0}^l - Y_{n,3}^l &= \mathbf{A}^{l,n} \cos l\varphi + [(\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n})(\cos \varphi \cos l\varphi - \sin \varphi \sin l\varphi)] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + [(\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n})(\cos \varphi \sin l\varphi + \sin \varphi \cos l\varphi)] \mathbf{e}_2 - \mathbf{A}^{l,n} \sin l\varphi \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{A}^{l,n} [\cos l\varphi - \sin l\varphi \mathbf{e}_3] + (\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n}) [(\cos \varphi \cos l\varphi - \sin \varphi \sin l\varphi) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\cos \varphi \sin l\varphi + \sin \varphi \cos l\varphi) \mathbf{e}_2]. \end{aligned}$$

Substituiert man sowohl in (3.59) als auch in der letzten Gleichung die bereits bewiesene Beziehung (3.25) in der Form

$$\mathbf{A}^{l+1,n} = (n+l+2)(\mathbf{B}^{l,n} + \mathbf{C}^{l,n}), \quad l = 0, \dots, n,$$

so erhält man für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ und $l = 0, \dots, n$ zusammenfassend

$$\begin{aligned} r^n A_n^l(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{2^{l+1} n! r^n}{(n+l+2)!} \left[(n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} (\cos l\varphi - \sin l\varphi \mathbf{e}_3) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}^{l+1,n} ((\cos \varphi \cos l\varphi - \sin \varphi \sin l\varphi) \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + (\cos \varphi \sin l\varphi + \sin \varphi \cos l\varphi) \mathbf{e}_2) \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

wobei die Funktionen $\mathbf{A}^{l,n}(\theta)$ explizit durch (3.18) gegeben sind. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist Gegenstand des folgenden Theorems.

Theorem 3.16. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelten für die Elemente der monogenen Appell-Basis (3.54) die Rekursionsbeziehungen:*

$$\mathbf{x} A_n^l = \frac{1}{2(n+1)} \left[(2n+3) A_{n+1}^l - (2l+1) \widehat{A_{n+1}^l} \right], \quad (3.61)$$

$$A_{n+1}^l = \frac{n+1}{2(n-l+1)(n+l+2)} \left[(2n+3) \mathbf{x} A_n^l + (2l+1) \bar{\mathbf{x}} \widehat{A_n^l} \right], \quad (3.62)$$

mit $l = 0, \dots, n$. Die zum Appell-Polynom A_n^l korrespondierende \mathbb{H} -anti-holomorphe Funktion $\widehat{A_n^l}$ ist nach Korollar 2.1 definiert.

Beweis. Es wird mit dem Beweis der Rekursionsformel (3.61) begonnen. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten und der Darstellung (3.60) ergibt sich zunächst für die linke Seite der Gleichung

$$r^{n+1} \omega A_n^l(\omega) = \frac{2^{l+1} n! r^{n+1}}{(n+l+2)!} [\omega f_{A_n^l}(\omega)],$$

wobei eine koordinatenweise Auswertung der Funktion in eckigen Klammern nach überschaubarer Rechnung auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} [\omega f_{A_n^l}(\omega)]_0 &= ((n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \cos \theta - \mathbf{A}^{l+1,n} \sin \theta) \cos l\varphi, \\ [\omega f_{A_n^l}(\omega)]_1 &= ((n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \sin \theta + \mathbf{A}^{l+1,n} \cos \theta) (\cos \varphi \cos l\varphi - \sin \varphi \sin l\varphi), \\ [\omega f_{A_n^l}(\omega)]_2 &= ((n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \sin \theta + \mathbf{A}^{l+1,n} \cos \theta) (\cos \varphi \sin l\varphi + \sin \varphi \cos l\varphi) \end{aligned}$$

und

$$[\omega f_{A_n^l}(\omega)]_3 = -((n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \cos \theta - \mathbf{A}^{l+1,n} \sin \theta) \sin l\varphi$$

führt. Die in den letzten Beziehungen auftretenden Koeffizienten werden vereinfachend unter den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{03}(\varphi) &= \cos l\varphi - \sin l\varphi \mathbf{e}_3, \\ \mathcal{C}_{12}(\varphi) &= (\cos \varphi \cos l\varphi - \sin \varphi \sin l\varphi) \mathbf{e}_1 + (\cos \varphi \sin l\varphi + \sin \varphi \cos l\varphi) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

zusammengefasst. Somit ergibt sich für die linke Seite der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} r^{n+1} \omega A_n^l(\omega) &= \frac{2^{l+1} n! r^{n+1}}{(n+l+2)!} \left[((n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \cos \theta - \mathbf{A}^{l+1,n} \sin \theta) \mathcal{C}_{03}(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + ((n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \sin \theta + \mathbf{A}^{l+1,n} \cos \theta) \mathcal{C}_{12}(\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Nun wird die rechte Seite der Rekursionsformel (3.61) betrachtet. Stellt man diese koordinatenweise dar, so ergibt sich nach (2.14) äquivalent

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2(n+1)} \left[(2n+3) A_{n+1}^l - (2l+1) \widehat{A_{n+1}^l} \right] \\ &= \frac{n-l+1}{n+1} ([A_{n+1}^l]_0 + [A_{n+1}^l]_3 \mathbf{e}_3) + \frac{n+l+2}{n+1} ([A_{n+1}^l]_1 \mathbf{e}_1 + [A_{n+1}^l]_2 \mathbf{e}_2), \end{aligned}$$

was sich wiederum mit (3.60) zu

$$\begin{aligned} &\frac{r^{n+1}}{2(n+1)} \left[(2n+3) A_{n+1}^l(\omega) - (2l+1) \widehat{A_{n+1}^l(\omega)} \right] \\ &= \frac{2^{l+1} n! r^{n+1}}{(n+l+3)!} \left[(n-l+1)(n+l+3) \mathbf{A}^{l,n+1} \mathcal{C}_{03}(\varphi) + (n+l+2) \mathbf{A}^{l+1,n+1} \mathcal{C}_{12}(\varphi) \right] \end{aligned}$$

aufösen lässt. Wie man leicht einsieht, führt ein Koeffizientenvergleich mit der linken Seite der Ausgangsgleichung (3.63) auf die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} (n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \cos \theta - \mathbf{A}^{l+1,n} \sin \theta &= (n-l+1) \mathbf{A}^{l,n+1}, \\ (n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \sin \theta + \mathbf{A}^{l+1,n} \cos \theta &= \frac{n+l+2}{n+l+3} \mathbf{A}^{l+1,n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

Bringt man nun die erste Gleichung in (3.64) auf die Form

$$(n+l+3) \mathbf{A}^{l+1,n} \cos \theta = \mathbf{A}^{l+2,n} \sin \theta + (n-l) \mathbf{A}^{l+1,n+1}$$

und setzt diese in die zweite Gleichung ein, so reduziert sich der Beweis letztendlich auf die Bedingung

$$0 \stackrel{!}{=} (n+l+3)(n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} \sin \theta + \mathbf{A}^{l+2,n} \sin \theta - 2(l+1) \mathbf{A}^{l+1,n+1}. \quad (3.65)$$

Aus den bereits bewiesenen Beziehungen (3.24) und (3.25) erhält man ferner, dass

$$2(n+l+3) \mathbf{C}^{l+1,n} = (n+l+3)(n+l+2) \mathbf{A}^{l,n} + \mathbf{A}^{l+2,n},$$

infolge dessen sich Gleichung (3.65) zu

$$0 \stackrel{!}{=} 2(n+l+3) \mathbf{C}^{l+1,n} \sin \theta - 2(l+1) \mathbf{A}^{l+1,n+1} \quad (3.66)$$

vereinfacht. Wird nun in (3.18) die Rekursionsformel (3.10) in der Form

$$\sin \theta \frac{d}{dt} [P_{n+2}^{l+1}(t)]_{t=\cos \theta} = P_{n+2}^{l+2}(\cos \theta) - \frac{l+1}{\sin \theta} \cos \theta P_{n+2}^{l+1}(\cos \theta)$$

substituiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{l+1,n+1} &= \frac{1}{2} \left(\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+2}^{l+1}(t)]_{t=\cos \theta} + (n+2) \cos \theta P_{n+2}^{l+1}(\cos \theta) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((n-l+1) \cos \theta P_{n+2}^{l+1}(\cos \theta) + \sin \theta P_{n+2}^{l+2}(\cos \theta) \right). \end{aligned}$$

Einsetzen der letzten Darstellung und der Beziehung (3.20) in die Gleichung (3.66) liefert dann

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} 2(n+l+3) \sin \theta \left[\frac{1}{2} (l+1) \frac{1}{\sin \theta} P_{n+1}^{l+1}(\cos \theta) \right] \\ &\quad - 2(l+1) \left[\frac{1}{2} \left((n-l+1) \cos \theta P_{n+2}^{l+1}(\cos \theta) + \sin \theta P_{n+2}^{l+2}(\cos \theta) \right) \right] \\ &= (n+l+3) P_{n+1}^{l+1}(\cos \theta) - (n-l+1) \cos \theta P_{n+2}^{l+1}(\cos \theta) - \sin \theta P_{n+2}^{l+2}(\cos \theta), \end{aligned}$$

was nach Substitution mit $t = \cos \theta$ auf die Darstellung

$$0 \stackrel{!}{=} (n+l+3)P_{n+1}^{l+1}(t) - (n-l+1)tP_{n+2}^{l+1}(t) - \sqrt{1-t^2}P_{n+2}^{l+2}(t)$$

führt. Äquivalent ergibt sich diese Beziehung jedoch auch durch Gleichsetzen der Rekursionsformeln (3.9) und (3.10)

$$(n+l+3)P_{n+1}^{l+1}(t) - (n+2)tP_{n+2}^{l+1}(t) = \sqrt{1-t^2}P_{n+2}^{l+2}(t) - (l+1)tP_{n+2}^{l+1}(t),$$

womit also die erste Gleichung (3.61) der Behauptung vollständig bewiesen wäre.

Die zweite Rekursionsformel (3.62) folgt dann in einfacher Weise aus den oben gezeigten Beziehungen. Um dies zu verdeutlichen, wird zunächst die rechte Seite der Gleichung auf ihre Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2(n-l+1)(n+l+2)} \left[(2n+3) \mathbf{x} A_n^l + (2l+1) \bar{\mathbf{x}} \widehat{A_n^l} \right] \\ &= \frac{n+1}{n-l+1} ([\mathbf{x} A_n^l]_0 + [\mathbf{x} A_n^l]_3 \mathbf{e}_3) + \frac{n+1}{n+l+2} ([\mathbf{x} A_n^l]_1 \mathbf{e}_1 + [\mathbf{x} A_n^l]_2 \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

gebracht. Das explizite Auflösen der Komponenten in der letzten Gleichung nach Beziehung (3.63) und ein anschließender Koeffizientenvergleich mit der linken Seite nach Darstellung (3.60) führen letztendlich erneut auf die Bedingungen (3.64) und damit zum Beweis der Rekursionsformel (3.62). \square

Bemerkung 3.8. Anhand der Rekursionsformeln (3.61) und (3.62) lässt sich erkennen, dass der Index l der auftretenden Appell-Polynome unverändert bleibt, was also bedeutet, dass nach Abbildung 3.5 jeweils die Elemente der l -ten Spalte in Beziehung gesetzt werden. Da nach Konstruktion der Appell-Basis (3.54) die für den Rekursionsanfang in der l -ten Spalte benötigten Polynome A_l^l , $l \in \mathbb{N}_0$ durch die einfache (kartesische) Darstellung $A_l^l = (y - z\mathbf{e}_3)^l$ bekannt sind, ist im Speziellen durch die Formel (3.62) ein weiterer Zugang zur Erzeugung und effizienten Implementierung der Appell-Basis gegeben.

Aufgrund der letzten Bemerkung werden abschließend noch die Rekursionsformeln für die Orthonormalbasis (3.45) angegeben, welche man unmittelbar durch Einsetzen der Relation (3.58) in die Rekursionsbeziehungen (3.61) und (3.62) erhält.

Korollar 3.15. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelten für die Elemente der Orthonormalbasis (3.45) die Rekursionsbeziehungen:

$$\mathbf{x} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l = \frac{1}{2} p_{n,-l} \left[(2n+3) \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l - (2l+1) \widehat{\varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l} \right], \quad (3.67)$$

$$\varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l = \frac{1}{2} p_{n,-l} \frac{2n+5}{2n+3} \left[(2n+3) \mathbf{x} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l + (2l+1) \widehat{\mathbf{x} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l} \right], \quad (3.68)$$

mit $p_{n,-l} = \sqrt{\frac{2n+3}{(2n+5)(n-l+1)(n+l+2)}}$ und $l = 0, \dots, n$. Die zum Basispolynom $\varphi_{n,\mathbb{H}}^l$ korrespondierende \mathbb{H} -anti-holomorphe Funktion $\widehat{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l}$ ist nach Korollar 2.1 definiert.

Unter Verwendung der Rekursionsformeln (3.68) bzw. (3.62) können die polynomialen Orthogonalsysteme (3.45) bzw. (3.54) nun auf direktem Weg erzeugt werden, wodurch der aufwendige Konstruktionsprozess⁷ auf der Grundlage der monogenen Kugelfunktionen $\{X_n^0, X_n^m, Y_n^m : m = 1, \dots, n+1\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ entfällt.

3.2.11 Äußere monogene Funktionen und Laurentreihen

Schwerpunkt der vorangegangenen Abschnitte dieses Kapitels waren polynomiale Reihenentwicklungen für das Gebiet der Einheitskugel. Hierbei konnten \mathbb{H} -holomorphe Orthogonalreihen konstruiert werden, welche alle bis dato betrachteten Eigenschaften der komplexen Potenzreihen auf den räumlichen Fall verallgemeinern. Zwangsläufig stellt sich daher die Frage, ob sich auch für das Außengebiet eine Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Funktionen mit ähnlichen strukturellen Eigenschaften wie im Innengebiet konstruieren lässt. Daher werden zunächst einige der bislang verwendeten Bezeichnungen konkretisiert.

Definition 3.5. (I) Es seien $\mathbb{B}_3^+ := \mathbb{B}_3^+(0, 1)$ das Gebiet der Einheitskugel und $\overline{\mathbb{B}_3^+} := \mathbb{B}_3^+ \cup S^2$ die Abschließung mit der Einheitssphäre $S^2 := \partial \mathbb{B}_3^+$. Das Außengebiet sei durch $\mathbb{B}_3^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathbb{B}_3^+}$ definiert und seine Abschließung durch $\overline{\mathbb{B}_3^-} := \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_3^+$.

(II) Es sei \mathcal{M}_n^+ der Raum der \mathbb{H} -holomorphen homogenen Polynome vom Grad n . Ein beliebiges Element P_n dieses Raumes heißt *inneres sphärisches Polynom* der Ordnung n .

⁷q.v. die Kapitel 3.2.2 - 3.2.5 und das Kapitel 3.2.9

(III) Es sei \mathcal{M}_n^- der Raum der \mathbb{H} -holomorphen homogenen Funktionen in $\mathbb{R}_0^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vom Homogenitätsgrad $-(n+2)$. Ein beliebiges Element Q_n dieses Raumes heißt *äußere sphärische Funktion* der Ordnung n .

Zur Erzeugung von vollständigen Systemen äußerer sphärischer Funktionen wird die im Folgenden definierte Transformation verwendet.

Definition 3.6 (Kelvin-Transformation in \mathbb{H}). Es sei $P_n \in \mathcal{M}_n^+$. Die bijektive Abbildung $\mathcal{K} : \mathcal{M}_n^+ \longrightarrow \mathcal{M}_n^-$, gegeben durch

$$Q_n(\mathbf{x}) = \mathcal{K}(P_n) = \frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} P_n \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} \right), \quad (3.69)$$

heißt *Kelvin-Transformation in \mathbb{H}* .

Dieser Ansatz ist in erster Linie dadurch motiviert, dass für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ die komplexe Kelvin-Transformation des inneren Polynoms z^n direkt die entsprechende äußere Funktion $z^{-(n+1)}$ liefert. Vor diesem Hintergrund soll nun untersucht werden, ob die Anwendung der hyperkomplexen Kelvin-Transformation auf die für das Innengebiet \mathbb{B}_3^+ konstruierten Basissysteme (3.45) und (3.54) erneut auf vollständige Systeme im Außengebiet \mathbb{B}_3^- führt und welche Eigenschaften dabei erhalten bleiben.

Eine Orthonormalbasis äußerer \mathbb{H} -holomorpher Funktionen

Zuerst wird die Anwendung der Kelvin-Transformation (3.69) auf die Elemente der Orthonormalbasis (3.45) studiert.

Theorem 3.17. Es sei $\{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l : l = 0, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ die \mathbb{H} -lineare Orthonormalbasis (3.45). Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die homogenen \mathbb{H} -holomorphen Funktionen

$$\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l := \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \mathcal{K}(\varphi_{n,\mathbb{H}}^l), \quad l = 0, \dots, n \quad (3.70)$$

von Homogenitätsgrad $-(n+2)$ orthonormal in $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.

Beweis. Für feste $n, p \in \mathbb{N}_0$ seien $\varphi_{n,\mathbb{H}}^l \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{H}; \mathbb{H})$, $l = 0, \dots, n$ und $\varphi_{p,\mathbb{H}}^m \in \mathcal{M}_p^+(\mathbb{H}; \mathbb{H})$, $m = 0, \dots, p$ zwei beliebige homogene \mathbb{H} -holomorphe Polynome der Orthonormalbasis (3.45). Nach einfacher Rechnung erhält man für das innere Produkt

der Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \varphi_{p,\mathbb{H}}^m \rangle_{(\mathbb{B}_3^+, \mathbb{H})} &= \int_{\mathbb{B}_3^+} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\mathbf{x})} \varphi_{p,\mathbb{H}}^m(\mathbf{x}) dV \\
&= \int_0^1 r^{n+p+2} dr \int_{S^2} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\boldsymbol{\omega})} \varphi_{p,\mathbb{H}}^m(\boldsymbol{\omega}) d\sigma \\
&= \frac{1}{n+p+3} \int_{S^2} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\boldsymbol{\omega})} \varphi_{p,\mathbb{H}}^m(\boldsymbol{\omega}) d\sigma = \begin{cases} 1 & : n = p \wedge l = m \\ 0 & : n \neq p \vee l \neq m \end{cases}
\end{aligned}$$

und damit für das Oberflächenintegral

$$\int_{S^2} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\boldsymbol{\omega})} \varphi_{p,\mathbb{H}}^m(\boldsymbol{\omega}) d\sigma = \begin{cases} 2n+3 & : n = p \wedge l = m, \\ 0 & : n \neq p \vee l \neq m. \end{cases} \quad (3.71)$$

Unter Verwendung des letzten Resultates (3.71) lässt sich nun auch die Orthonormalität der aus der Transformation hervorgegangenen äußeren Funktionen zeigen. Hierzu wird das innere Produkt von zwei beliebigen homogenen \mathbb{H} -holomorphen Funktionen aus (3.70) betrachtet. Für feste $n, p \in \mathbb{N}_0$ resultiert die gesuchte Beziehung dann aus

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l, \varphi_{-(p+2),\mathbb{H}}^m \rangle_{(\mathbb{B}_3^-, \mathbb{H})} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(2p+1)}{(2n+3)(2p+3)}} \int_{\mathbb{B}_3^-} \frac{\overline{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l \left(\frac{\overline{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} \right) \frac{\overline{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} \varphi_{p,\mathbb{H}}^m \left(\frac{\overline{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} \right) dV \\
&= \sqrt{\frac{(2n+1)(2p+1)}{(2n+3)(2p+3)}} \int_1^\infty \frac{1}{r^{n+p+2}} dr \int_{S^2} \overline{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\overline{\boldsymbol{\omega}})} \varphi_{p,\mathbb{H}}^m(\overline{\boldsymbol{\omega}}) d\sigma \\
&= \begin{cases} 1 & : n = p \wedge l = m \\ 0 & : n \neq p \vee l \neq m, \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei $l = 0, \dots, n$ und $m = 0, \dots, p$. In Bezug auf den letzten Berechnungsschritt sei noch angemerkt, dass sich der Wert des Oberflächenintegrals (3.71) für konjugierte Argumente nicht ändert, da sich bei dieser Koordinatentransformation die zugehörige Funktionaldeterminante zu 1 ergibt. \square

In [Sudbery 1979] wurde ferner bewiesen, dass der Unterraum $\mathcal{M}_n^-(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ der äußeren sphärischen Funktionen vom Homogenitätsgrad $-(n+2)$ die Dimension

$n+1$ besitzt. Da mittels der Kelvin-Transformation der Raum $L^2(\mathbb{B}_3^+; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ eindeutig auf den Raum $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ abgebildet wird, folgt aus der Orthogonalität des transformierten Systems (3.70) auch die Vollständigkeit im ganzen Raum.

Korollar 3.16. *Das System der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Funktionen $\{\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l : l = 0, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$.*

Die Abbildung 3.6 veranschaulicht die bis hierhin erhaltenen Resultate für die äußere Orthonormalbasis (3.70) und deren Zusammenhang zur Orthonormalbasis im Innengebiet (3.45).

Homogenitätsgrad k	n	$\varphi_{n,\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{n,\mathbb{H}}^1$	$\varphi_{n,\mathbb{H}}^2$	$\varphi_{n,\mathbb{H}}^3$	\cdots	$\varphi_{n,\mathbb{H}}^n$	
		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
	3	$\varphi_{3,\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{3,\mathbb{H}}^1$	$\varphi_{3,\mathbb{H}}^2$	$\varphi_{3,\mathbb{H}}^3$			
	2	$\varphi_{2,\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{2,\mathbb{H}}^1$	$\varphi_{2,\mathbb{H}}^2$				
	1	$\varphi_{1,\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{1,\mathbb{H}}^1$					
	0	$\varphi_{0,\mathbb{H}}^0$	Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome in $L^2(\mathbb{B}_3^+; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$					
	-1	-----						
	-2	$\varphi_{-2,\mathbb{H}}^0$	Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Funktionen in $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$					
	-3	$\varphi_{-3,\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{-3,\mathbb{H}}^1$					
	-4	$\varphi_{-4,\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{-4,\mathbb{H}}^1$	$\varphi_{-4,\mathbb{H}}^2$				
	-5	$\varphi_{-5,\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{-5,\mathbb{H}}^1$	$\varphi_{-5,\mathbb{H}}^2$	$\varphi_{-5,\mathbb{H}}^3$	\ddots		
		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
	$-(n+2)$	$\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^0$	$\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^1$	$\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^2$	$\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^3$	\cdots	$\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^n$	

Für die Elemente der Basissysteme gilt:

(i) $\varphi_{k,\mathbb{H}}^l = \sqrt{\frac{2k+3}{2k+1}} \mathcal{K} \left(\varphi_{-(k+2),\mathbb{H}}^l \right), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

(ii) $\partial_0 \varphi_{k,\mathbb{H}}^l = \text{sign } k \sqrt{\frac{(2k+3)(k-l)(k+l+1)}{2k+1}} \varphi_{k-1,\mathbb{H}}^l, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$

(iii) $\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{k,\mathbb{H}}^l = \text{sign } k \sqrt{\frac{2k+3}{(2k+5)(k-l+1)(k+l+2)}} \varphi_{k+1,\mathbb{H}}^l, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$

Der Definitionsbereich des Parameters l ist dem Korollar 3.17 zu entnehmen.

Abbildung 3.6: Vollständige Orthonormalsysteme innerer und äußerer homogener \mathbb{H} -holomorpher Funktionen.

Im Folgenden sollen die Basiselemente des äußeren Systems in Bezug auf ihre hyperkomplexe Ableitung und Stammfunktion untersucht werden. In \mathbb{C} gilt bekanntermaßen auch für das System im Außengebiet, dass für feste $n \in \mathbb{N}_0$ die Ableitung einer äußeren Basisfunktion vom Homogenitätsgrad $-(n+1)$ erneut auf ein

reelles Vielfache einer Basisfunktion vom Homogenitätsgrad $-(n+2)$ führt. Wie das nächste Theorem zeigt, lässt sich unter Verwendung des neuartigen monogenen Funktionensystems nun auch diese strukturelle Eigenschaft auf die hyperkomplexe Theorie übertragen.

Theorem 3.18. *Für die äußeren Funktionen $\varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l$, $l = 0, \dots, n$ der Orthonormalbasis (3.70) gelten die folgenden Eigenschaften:*

- (I) *Die Anwendung der hyperkomplexen Ableitung $\partial_0 = \frac{1}{2}\partial$ auf die Basisfunktionen in (3.70) liefert*

$$\partial_0 \varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l = -\sqrt{\frac{(2n+1)(n-l+1)(n+l+2)}{2n+3}} \varphi_{-(n+3),\mathbb{H}}^l,$$

wobei $l = 0, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

- (II) *Der Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{H}} : \mathcal{M}_n^-(\mathbb{H}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}^-(\mathbb{H}; \mathbb{H})$, explizit gegeben durch*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l = -\sqrt{\frac{2n+1}{(2n-1)(n-l)(n+l+1)}} \varphi_{-(n+1),\mathbb{H}}^l,$$

definiert eine Primitive auf der \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis, so dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $l = 0, \dots, n-1$ die Beziehung $\partial_0 [\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l] = \varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^l$ gilt.

Beweis. Zuerst wird Paragraph (I) des Theorems bewiesen. Nach Anwendung der Kelvin-Transformation (3.69) auf die Basiselemente und unter Verwendung der Relation (2.18) ist äquivalent zu zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2n+3}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) \right) = -\sqrt{\frac{(2n+3)(n-l+1)(n+l+2)}{2n+5}} \frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2n+5}} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}).$$

Die linke Seite der Gleichung lässt sich nun nach der Produktregel auswerten, wonach sich für die jeweiligen Summanden unter Beachtung der Kettenregel die Beziehungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2n+3}} \right) \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{2|\mathbf{x}|^2 - (2n+3)\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x})}{2|\mathbf{x}|^{2n+5}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2n+3}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) \right) &= \sqrt{\frac{(2n+3)(n-l)(n+l+1)}{2n+1}} \frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2n+3}} \varphi_{n-1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

ergeben. Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung und Umordnung erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{c_{n,l}^I \bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2n+3}} \varphi_{n-1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{2|\mathbf{x}|^2 - (2n+3)\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x})}{2|\mathbf{x}|^{2n+5}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{c_{n,l}^{II} \bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2n+5}} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) \\ &= 2c_{n,l}^I |\mathbf{x}|^2 \bar{\mathbf{x}} \varphi_{n-1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) + [2|\mathbf{x}|^2 - (2n+3)\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x})] \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) + 2c_{n,l}^{II} \bar{\mathbf{x}} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

wobei für die reellen Koeffizienten die Bezeichnungen $c_{n,l}^I = \sqrt{\frac{(2n+3)(n-l)(n+l+1)}{2n+1}}$ und $c_{n,l}^{II} = \sqrt{\frac{(2n+3)(n-l+1)(n+l+2)}{2n+5}}$ eingeführt wurden. Eine Substitution der Rekursionsformel (3.67) im ersten Summanden der letzten Darstellung liefert

$$2 c_{n,l}^I |\mathbf{x}|^2 \bar{\mathbf{x}} \varphi_{n-1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) = |\mathbf{x}|^2 \left[(2n+1) \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) - (2l+1) \widehat{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}})} \right],$$

wodurch sich diese auf die Beziehung

$$0 \stackrel{!}{=} (2n+3) \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) + (2l+1) |\mathbf{x}|^2 \widehat{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}})} - 2 c_{n,l}^{II} \bar{\mathbf{x}} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}})$$

vereinfacht. Durch linksseitige Multiplikation mit \mathbf{x} und anschließende Division durch $|\mathbf{x}|^2$ erhält man schließlich

$$0 \stackrel{!}{=} (2n+3) \bar{\mathbf{x}} \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}) + (2l+1) \mathbf{x} \widehat{\varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}})} - 2 c_{n,l}^{II} \varphi_{n+1,\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{x}}).$$

Diese Beziehung ist äquivalent zur Rekursionsformel (3.68) für konjugierte Argumente, wodurch Paragraph (I) bewiesen wäre.

Die Anwendung des Operators $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}$ auf beide Seiten der so eben gezeigten Teilbehauptung (I) führt nach wenigen Umformungen⁸ auch auf die gesuchte Teilbehauptung (II) und somit zum vollständigen Beweis des Theorems. \square

Führt man schließlich für den Homogenitätsgrad der jeweiligen inneren bzw. äußeren Funktion die einheitliche Bezeichnung k ein, so lassen sich einige Teilbehauptungen der Theoreme 3.9, 3.17 und 3.18 allgemein für beide Systeme formulieren.

Korollar 3.17. *Für die homogenen \mathbb{H} -holomorphen Funktionen der vollständigen Orthonormalsysteme (3.45) und (3.70) gelten die folgenden Beziehungen:*

(I) *Für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ gilt die Transformationsbeziehung*

$$\varphi_{k,\mathbb{H}}^l = \sqrt{\frac{2k+3}{2k+1}} \mathcal{K}(\varphi_{-(k+2),\mathbb{H}}^l), \quad l = 0, \dots, |k+1| - 1.$$

(II) *Die Anwendung der hyperkomplexen Ableitung $\partial_0 = \frac{1}{2}\partial$ auf ein beliebiges Element der Systeme (3.45) und (3.70) liefert*

$$\partial_0 \varphi_{k,\mathbb{H}}^l = \text{sign } k \sqrt{\frac{(2k+3)(k-l)(k+l+1)}{2k+1}} \varphi_{k-1,\mathbb{H}}^l,$$

⁸cf. Beweis des Theorems 3.9

wobei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ und

$$l = \begin{cases} 0, \dots, k-1 & : \text{sign } k = 1, \\ 0, \dots, |k+1| - 1 & : \text{sign } k = -1. \end{cases}$$

(III) Der Operator $\mathcal{P}_{\mathbb{H}} : \mathcal{M}_n^{\pm}(\mathbb{H}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \pm 1}^{\pm}(\mathbb{H}; \mathbb{H})$, explizit gegeben durch

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{k, \mathbb{H}}^l = \text{sign } k \sqrt{\frac{2k+3}{(2k+5)(k-l+1)(k+l+2)}} \varphi_{k+1, \mathbb{H}}^l,$$

definiert eine Primitive auf den Elementen der \mathbb{H} -linearen Orthonormalsysteme (3.45) und (3.70), so dass für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$ und

$$l = \begin{cases} 0, \dots, k & : \text{sign } k = 1, \\ 0, \dots, |k+1| - 2 & : \text{sign } k = -1 \end{cases}$$

die Beziehung $\partial_0 [\mathcal{P}_{\mathbb{H}} \varphi_{k, \mathbb{H}}^l] = \varphi_{k, \mathbb{H}}^l$ gilt.

Die im Vorangegangenen gezeigten Struktur- und Abbildungseigenschaften zwischen den Basissystemen (3.45) und (3.70) können anhand der Abbildung 3.6 gut nachvollzogen werden. Dabei wird ferner deutlich, dass einerseits die inneren Polynome $\{\varphi_{k, \mathbb{H}}^k\}_{k \geq 0}$ bezüglich der hyperkomplexen Ableitung und andererseits die äußeren Funktionen $\{\varphi_{k, \mathbb{H}}^{-(k+2)}\}_{k \leq -2}$ bezüglich der Primitiven einen Sonderfall darstellen, worauf letztendlich auch die unterschiedlichen Definitionsbereiche der Parameter k und l zurückzuführen sind.

Eine Appell-Basis äußerer \mathbb{H} -holomorpher Funktionen

Ausgangspunkt der Konstruktion ist die im letzten Abschnitt bewiesene Darstellung (3.58) der Appell-Polynome durch die Orthonormalbasis. Die Anwendung der Kelvin-Transformation (3.69) auf beiden Seiten der Gleichung liefert unter Beachtung von (3.70) die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(A_n^l) &= 2^{l+1} n! \sqrt{\frac{\pi}{(2n+3)(n-l)!(n+l+1)!}} \mathcal{K}(\varphi_{n, \mathbb{H}}^l) \\ &= 2^{l+1} n! \sqrt{\frac{\pi}{(2n+1)(n-l)!(n+l+1)!}} \varphi_{-(n+2), \mathbb{H}}^l =: H_{-(n+2), \mathbb{H}}^l. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Anhand der Abbildung 3.6 lässt sich erkennen, dass für die Konstruktion eines Appell-Systems äußerer monogener Funktionen anstelle der Primitivierung nun die Ableitung als zentrale Operation auftritt. Daher wird die hyperkomplexe Ableitung der eingeführten Hilfsfunktion benötigt, welche sich nach Paragraph (I) des Theorems 3.18 in einfacher Weise durch die Beziehung

$$\partial_0 H_{-(n+2),\mathbb{H}}^l = -\frac{(n-l+1)(n+l+2)}{n+1} H_{-(n+3),\mathbb{H}}^l$$

angeben lässt. Eine weitere Schwierigkeit resultiert aus der Tatsache, dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ nach Ableiten aller äußeren Funktionen im Teilraum $\mathcal{M}_n^-(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ nicht alle Elemente in $\mathcal{M}_{n+1}^-(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ erreicht werden. Gemäß Abbildung 3.6 entsprechen die unerreichten Elemente $\left\{ \varphi_{-(n+2),\mathbb{H}}^n \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ gerade den Kelvin-Transformierten der monogenen Konstanten. Im Umkehrschluss können diese Funktionen auch dadurch charakterisiert werden, dass für diese keine direkten Primitiven in Bezug auf die äußeren Basisfunktionen existieren. Eine ähnliche Situation findet sich auch im ebenen Fall für die äußere holomorphe Funktion $\frac{1}{z}$, welche bekanntlich den komplexen Logarithmus als Stammfunktion und damit auch keine unmittelbare Primitive in der Basis der negativen z -Potenzen besitzt. Hier behilft man sich mit geeigneten Potenzreihenentwicklungen der Funktion $\frac{1}{z}$, auf deren Grundlage sich wiederum eine Primitive in Form einer unendlichen Reihe definieren lässt. Auf diesen Sachverhalt soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden. Somit bleibt die Frage nach einer geeigneten Normierung des äußeren Appell-Systems zu klären. Dazu sei an die expliziten Ausdrücke der monogenen Konstanten des inneren Appell-Systems

$$A_n^n = (y - z\mathbf{e}_3)^n =: \boldsymbol{\zeta}^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

erinnert. Nach Anwendung der Kelvin-Transformation (3.69) auf die monogenen Appell-Konstanten ergeben sich die einfachen Beziehungen

$$A_{-(n+2)}^n := \mathcal{K}(A_n^n) = (-1)^n \frac{\bar{\mathbf{x}} \boldsymbol{\zeta}^n}{|\mathbf{x}|^{2n+3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.73)$$

Wie sich unschwer erkennen lässt, führt die Transformation des Appell-Polynoms A_0^0 auf ein reelles Vielfache des Cauchy-Kerns (2.21), was vollkommen analog zum komplexen Fall ist. Die Bilder der Transformation der übrigen Konstanten $A_n^n, n > 0$ können dann als Produkte des Cauchy-Kerns und der Funktion $\frac{4\pi(-1)^n \boldsymbol{\zeta}^n}{|\mathbf{x}|^{2n}}$ charakterisiert werden. Da sich diese Eigenschaften in natürlicher Weise aus der Transformation der Appell-Konstanten ergeben und ferner die räumliche Entsprechung

der komplexen Funktion $\frac{1}{z}$ darin enthalten ist, sollen die Beziehungen (3.73) vorerst als Grundlage für die Normierung der äußeren Appell-Funktionen verwendet werden. Demzufolge ist die Konstruktion des äußeren Appell-Systems bezüglich des Strukturschemas⁹ nun spaltenweise vorzunehmen. Für ein beliebiges $p \in \mathbb{N}_0$ und mit $\gamma_{n,l} = -\frac{(n-l+1)(n+l+2)}{n+1}$ lautet der Ansatz für die $(p+1)$ -te Spalte:

$$\begin{aligned}\check{A}_{-(p+2)}^p &= H_{-(p+2),\mathbb{H}}^p \\ \check{A}_{-(p+3)}^p &= \frac{1}{(-(p+2))} \partial_0 \check{A}_{-(p+2)}^p = \frac{1}{(-(p+2))} \gamma_{p,p} H_{-(p+3),\mathbb{H}}^p \\ \check{A}_{-(p+4)}^p &= \frac{1}{(-(p+3))} \partial_0 \check{A}_{-(p+3)}^p = \frac{1}{(-(p+2))(-(p+3))} \gamma_{p,p} \gamma_{p+1,p} H_{-(p+4),\mathbb{H}}^p \\ &\vdots \\ \check{A}_{-(n+2)}^l &= \frac{(l+1)!}{(-1)^{n-l}(n+1)!} \prod_{j=l}^{n-1} \gamma_{j,l} H_{-(n+2),\mathbb{H}}^l.\end{aligned}$$

Nach Vereinfachung des Produktes und unter Berücksichtigung der Beziehung (3.72) erhält man schließlich ein äußeres Appell-System

$$\check{A}_{-(n+2)}^l = \frac{l!(l+1)!(n+l+1)!(n-l)!}{n!(n+1)!(2l+1)!} \mathcal{K}(A_n^l), \quad l = 0, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

in Abhängigkeit der transformierten inneren Appell-Menge (3.54). Berücksichtigt man ferner, dass eine spaltenweise Multiplikation mit einer beliebigen \mathbb{H} -wertigen Konstante die Appell-Eigenschaft des Systems nicht verletzt, so können in der obigen Appell-Menge diejenigen Koeffizienten vernachlässigt werden, welche nur vom Parameter l abhängen. Damit ergibt sich das gesuchte äußere Appell-System zu

$$A_{-(n+2)}^l = \frac{(n+l+1)!(n-l)!}{n!(n+1)!} \mathcal{K}(A_n^l), \quad l = 0, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.74)$$

welches durch das folgende Theorem näher charakterisiert wird.

Theorem 3.19. *Das System äußerer homogener \mathbb{H} -holomorpher Funktionen $\{A_{-(n+2)}^l : l = 0, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine orthogonale Appell-Basis in $L^2(\mathbb{B}_3^-; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\partial_0 A_{-(n+2)}^l = -(n+2) A_{-(n+3)}^l, \quad l = 0, \dots, n$$

und

$$A_{-(n+2)}^n = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{n!(n+1)!} \frac{\bar{\mathbf{x}} \boldsymbol{\zeta}^n}{|\mathbf{x}|^{2n+3}}, \quad \boldsymbol{\zeta} = y - z\mathbf{e}_3.$$

⁹gemeint ist Abbildung 3.6

Beweis. Der Beweis folgt nach Konstruktion. \square

Der Zusammenhang zwischen (3.74) und der äußeren Orthonormalbasis (3.70) lässt sich dann für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ äquivalent durch

$$A_{-(n+2)}^l = \frac{2^{l+1}}{(n+1)!} \sqrt{\frac{\pi (n-l)! (n+l+1)!}{2n+1}} \varphi_{-(n+2), \mathbb{H}}^l, \quad l = 0, \dots, n \quad (3.75)$$

erhalten. Durch (3.70) ist damit auch der Bezug zur inneren Orthonormalbasis (3.45) hergestellt. Abschließend sei noch eine alternative Erzeugung der äußeren Appell-Basis über die hyperkomplexe Ableitung angegeben, welche nicht aus Transformationsbeziehungen der Polynome im Innengebiet hervorgeht. Unter Verwendung der Beziehungen für die transformierten monogenen Konstanten nach Theorem 3.19 erhält man

$$A_{-(n+2)}^l = \frac{(-1)^n (2l+1)!}{l! (n+1)!} \partial_0^{n-l} \left(\frac{\bar{\mathbf{x}} \zeta^l}{|\mathbf{x}|^{2l+3}} \right) = \frac{(-1)^n (2l+1)!}{l! (n+1)!} \left[\frac{\partial^{n-l}}{\partial x^{n-l}} \frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{2l+3}} \right] \zeta^l,$$

wobei $l = 0, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$. In diesem Zusammenhang sei angemerkt, dass bereits in [Brackx et al. 1982] partielle Ableitungen des Cauchy-Kerns untersucht wurden. Wie sich anhand der letzten Gleichung erkennen lässt, korrespondieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ des unnormierten Cauchy-Kerns zum Sonderfall $l = 0$.

Laurentreihenentwicklungen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen

Aus dem Beweis des Theorems 3.17 ergibt sich zunächst das Oberflächenintegral von zwei beliebigen Elementen der Orthonormalsysteme (3.45) und (3.70) über die Einheitssphäre S^2 zu

$$\langle \varphi_{k, \mathbb{H}}^l, \varphi_{q, \mathbb{H}}^m \rangle_{(S^2, \mathbb{H})} = \begin{cases} |2k+3| & : k = q \wedge l = m, \\ 0 & : k \neq q \vee l \neq m, \end{cases}$$

wobei $l = 0, \dots, |k+1|-1$, $m = 0, \dots, |q+1|-1$ und $k, q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Damit lässt sich auf der Grundlage der Basissysteme (3.45) und (3.70) ein allgemeiner Fourieransatz bezüglich S^2 machen, was auf die Reihenentwicklung

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} \sum_{l=0}^{|k+1|-1} \varphi_{k, \mathbb{H}}^l(\mathbf{x}) \gamma_{k,l}^*, \quad \gamma_{k,l}^* = \frac{1}{|2k+3|} \int_{S^2} \overline{\varphi_{k, \mathbb{H}}^l(\mathbf{y})} f(\mathbf{y}) d\sigma \quad (3.76)$$

führt. Diese Orthogonalreihe kann als verallgemeinerte Laurentreihenentwicklung einer im Gebiet der Einheitskugelschale $\Omega_{S^2} = \{\mathbf{x} \mid \xi < |\mathbf{x}| < 1\}$ \mathbb{H} -holomorphen Funktion f interpretiert werden, wobei der Außenradius durch die Einheitssphäre S^2 vorgegeben ist und somit $0 \leq \xi \leq 1$ gilt.

Im Folgenden soll nun versucht werden die Reihendarstellung (3.76) auch auf beliebige Kugelschalengebiete zu verallgemeinern und den theoretischen Zusammenhang zur monogenen Taylorreihe (3.55) und zur Integralformel von Cauchy (2.22) herzustellen. Im ersten Schritt wird zunächst jede Basisfunktion in den Laurent-Koeffizienten (3.76) durch ihre Kelvin-Transformierte ersetzt. Nach Paragraph (I) des Korollars 3.17 erhält man

$$\begin{aligned}\gamma_{k,l}^* &= \frac{1}{|2k+3|} \sqrt{\frac{2k+3}{2k+1}} \int_{S^2} \overline{\frac{\bar{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^3} \varphi_{-(k+2),\mathbb{H}}^l \left(\frac{\bar{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^2} \right)} f(\mathbf{y}) d\sigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2k+3)(2k+1)}} \int_{S^2} \overline{\varphi_{-(k+2),\mathbb{H}}^l \left(\frac{\bar{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^2} \right)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} f(\mathbf{y}) d\sigma.\end{aligned}$$

Seien nun $S_\rho^2 = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| = \rho\}$ die Sphäre mit Radius ρ und $d\mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} d\sigma$, dann ergeben sich die Laurent-Koeffizienten bezüglich der Integration über S_ρ^2 äquivalent zu

$$\gamma_{k,l}^* = \frac{1}{\sqrt{(2k+3)(2k+1)}} \int_{S_\rho^2} \overline{\varphi_{-(k+2),\mathbb{H}}^l(\bar{\mathbf{y}})} d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y}). \quad (3.77)$$

Nun soll die Orthogonalreihe (3.76) in der Form

$$f(\mathbf{x}) = f^a(\mathbf{x}) + f^b(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \varphi_{-(m+2),\mathbb{H}}^l(\mathbf{x}) \gamma_{-(m+2),l}^*}_{\textcircled{a}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \varphi_{n,\mathbb{H}}^l(\mathbf{x}) \gamma_{n,l}^*}_{\textcircled{b}}$$

betrachtet und die Reihe \textcircled{a} als *Hauptteil* sowie die Reihe \textcircled{b} als *Nebenteil* der Laurentreihenentwicklung von f bezeichnet werden. Unter Berücksichtigung der Laurent-Koeffizienten (3.77), mit $k = -(m+2)$, $m \in \mathbb{N}_0$ bzw. $k = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, erhält man nach Substitution der Beziehungen (3.58) und (3.75) für den Hauptteil

$$f^a(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m A_{-(m+2)}^l(\mathbf{x}) \frac{m+1}{4^{l+1} \pi} \int_{S_\rho^2} \overline{A_m^l(\bar{\mathbf{y}})} d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y})$$

und analog für den Nebenteil der Reihe

$$f^b(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n A_n^l(\mathbf{x}) \frac{n+1}{4^{l+1} \pi} \int_{S_\rho^2} \overline{A_{-(n+2)}^l(\bar{\mathbf{y}})} d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y}).$$

Damit lässt sich das Hauptresultat dieses Abschnitts wie folgt formulieren:

Theorem 3.20 (Laurentreihe in \mathbb{H}). *Es sei f eine in der Kugelschale*

$$\Omega_\xi = \{\mathbf{x} \mid \xi_1 < |\mathbf{x}| < \xi_2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \xi_1 < \xi_2 \leq \infty\}$$

\mathbb{H} -holomorphe Funktion. Dann lässt sich f in Ω_ξ in eine Laurentreihe

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} \sum_{l=0}^{|k+1|-1} A_k^l(\mathbf{x}) \gamma_{k,l}, \quad \gamma_{k,l} = \frac{|k+1|}{4^{l+1}\pi} \int_{S_\rho^2} \overline{A_{-(k+2)}^l(\bar{\mathbf{y}})} d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y}) \quad (3.78)$$

um den Ursprung entwickeln. Hierbei ist S_ρ^2 eine beliebige Sphäre mit Abstand ρ vom Ursprung, die im Inneren von Ω_ξ liegt.

Der Nebenteil der Laurentreihenentwicklung (3.78) einer Funktion f korrespondiert nun wie auch im Komplexen zur Taylorreihe dieser Funktion. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $l = 0, \dots, n$ führt die Anwendung der hyperkomplexen Differentialoperatoren $\bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l}$ auf beide Seiten der Cauchyschen Integralformel (2.22) auf die Beziehung

$$\bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\rho^2} \bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} \left(\frac{\overline{\mathbf{y} - \mathbf{x}}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} \right) d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y}).$$

Ferner lässt sich zeigen, dass

$$\bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} \left(\frac{\overline{\mathbf{y} - \mathbf{x}}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} \right) = \bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} A_{-2}^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \frac{(n+1)!}{4^l} \overline{A_{-(n+2)}^l(\mathbf{y} - \mathbf{x})}$$

gilt. Im Kontext der hier konstruierten Taylorreihe ergeben sich gewissermaßen für die n -ten Ableitungen der Funktion f die Beziehungen

$$\bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) = \frac{(n+1)!}{4^{l+1}\pi} \int_{S_\rho^2} \overline{A_{-(n+2)}^l(\bar{\mathbf{y}})} d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y})$$

und damit für die Taylorkoeffizienten

$$\frac{1}{n!} \bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \frac{n+1}{4^{l+1}\pi} \int_{S_\rho^2} \overline{A_{-(n+2)}^l(\bar{\mathbf{y}})} d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y}),$$

wobei $l = 0, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Erneut lässt sich für die Teilmenge $\{A_k^0\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}}$ der Appell-Funktionen die Analogie zur komplexen Laurentreihe herstellen. An dieser Stelle sei noch einmal auf die direkten Beziehungen dieser Funktionen zu den Appell-Polynomen nach H.R. MALONEK ET AL. (q.v. [Cação & Malonek 2006, Falcão et al. 2006, Falcão & Malonek 2007, Malonek & Falcão 2007]) und zu den Fueter-Sce-Erweiterungen der komplexen

Monome z^n (q.v. [Gürlebeck 2008]) hingewiesen, was eine natürliche Erklärung für diesen Sachverhalt liefert. Beachtet man außerdem, dass jede dieser Funktionen zum Unterraum \mathcal{A} gehört und damit wie im Komplexen $\overline{A_k^0(\bar{\mathbf{x}})} = A_k^0(\mathbf{x})$ gilt, so lässt sich die Laurentreihenentwicklung (3.78) für $l = 0$ auf die reduzierte Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} A_k^0(\mathbf{x}) \gamma_{k,0}, \quad \gamma_{k,0} = \frac{|k+1|}{4\pi} \int_{S_p^2} A_{-(k+2)}^0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}^* f(\mathbf{y})$$

bringen. Ein Vergleich mit der komplexen Laurentreihe für das Kreisringgebiet mit Entwicklungspunkt im Ursprung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \gamma_k, \quad \gamma_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_p^1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

verdeutlicht die Analogie der beiden Reihen.

3.3 Zusammenfassung

Gegenstand dieses Kapitels waren polynomiale Reihenentwicklungen \mathbb{H} -holomorpher Funktionen in $L^2(\Omega; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$. Auf der methodischen Grundlage der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln sollten aus theoretischer Sicht in erster Linie solche Ansatzsysteme untersucht werden, welche gute strukturelle Eigenschaften bezüglich der dort auftretenden Differentialoperatoren besitzen. Im Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit waren außerdem die Vollständigkeit und die numerische Stabilität der betrachteten Systeme von Interesse.

In einem ersten Schritt wurde daher das bekannte System der verallgemeinerten Potenzen betrachtet, welches ein vollständiges System homogener Polynome in $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ darstellt. Hierbei konnten für die Anwendung der Differentialoperatoren ∂_i , $i = 0, 1, 2$ auf einzelne Basiselemente sehr einfache Darstellungsformeln erhalten werden. Im Speziellen wurde gezeigt, dass neben der hyperkomplexen Ableitung ∂_0 die neu eingeführten Operatoren ∂_1 bzw. ∂_2 als Ableitungen nach den Fueter-Variablen \mathbf{z}_1 bzw. \mathbf{z}_2 interpretiert werden können. Anhand der explizit gegebenen differentiellen Beziehungen, ließ sich ferner für jeden Differentialoperator ein zugehöriger Primitivierungsoperator angeben, welcher jeweils als formale Umkehroperation auf den einzelnen Basiselementen definiert wurde. Von besonderem Interesse war dabei der $\mathcal{P}_{z,0}$ -Operator, der nach einem rein schematischen Konstruktionsprinzip erhalten wurde. Diese monogene Stammfunktion hat jedoch den Nachteil,

dass sich die Primitive für ein beliebiges Basiselement vom Grad n immer als Linearkombination der kompletten Basis vom Grad $n+1$ ergibt. Möchte man nun diesen Operator auf den ganzen Raum fortsetzen, so führt dies unweigerlich auf Reihen mit Dreifachsummen, welche sehr schwierig zu handhaben und daher für theoretische Auswertungen eher ungeeignet sind. Erschwerend kommt hinzu, dass bezüglich der Einheitskugel \mathbb{B}_3 die Basiselemente verschiedener Unterräume $\mathcal{M}_n(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ und $\mathcal{M}_m(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ für $n \neq m$ zwar orthogonal zueinander sind, dies im Allgemeinen jedoch nicht auf die Basiselemente in den einzelnen Unterräumen zutrifft. Außerdem ist eine orthogonale Zerlegung des Hilbert-Raumes $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ in den Teilraum der monogenen Konstanten und in sein orthogonales Komplement mit Hilfe dieser Basis nur durch vorherige Orthonormierung der Elemente in den Teilräumen möglich, was jedoch einen hohen technischen Aufwand erfordert und daher wenig praktikabel erscheint. Wie sich im Folgenden noch zeigen wird, ist es jedoch gerade die Teilmenge der monogenen Konstanten, der bei der praktischen Anwendung eine besondere Bedeutung zukommt. Zusammenfassend lässt sich daher feststellen, dass in Verallgemeinerung der komplexen Potenzreihe mit Hilfe der verallgemeinerten Potenzen einige wichtige funktionentheoretische Konzepte, wie beispielsweise die hyperkomplexe Ableitung oder die Taylorreihe, übertragen werden. Die wesentlichen strukturellen Eigenschaften der Reihenansätze in \mathbb{C} , wie etwa die Eigenschaft der Taylorentwicklung als Orthogonalreihe und deren direkter Zusammenhang zur Fourierreihe sowie zum Nebenteil der Laurentreihe, gehen dabei jedoch verloren. Somit eignet sich dieses System nur bedingt als Ansatzsystem für die verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln.

Daher wurde ein zweiter Zugang auf der Grundlage der Faktorisierung des Laplace-Operators untersucht. Ausgangspunkt war dabei das bereits in [Cação 2004] konstruierte vollständige System linear unabhängiger homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome. Unter Verwendung dieses Ansatzsystems wurden auf anderem Weg als in [Cação 2004] vollständige Orthonormalsysteme in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{K}) \cap \ker \bar{\partial}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$ konstruiert, welche sich sehr wesentlich von den bereits bekannten Orthonormalsystemen unterscheiden. Aufgrund einer vollkommen symmetrischen Anordnung der Ansatzfunktionen konnten für diese Systeme besondere Eigenschaften bezüglich ihrer hyperkomplexen Ableitung und Stammfunktion bewiesen werden. Im Speziellen bedeutet dies, dass analog zu \mathbb{R}, \mathbb{C} die Ableitung und Primitivierung einzelner Basiselemente erneut auf einzelne Vielfache der gleichen Basis führen. Unter Ver-

wendung der Fourierreihe konnte diese wichtige Struktureigenschaft auf den ganzen Raum übertragen werden, so dass sowohl die hyperkomplexe Ableitung als auch die Primitive der Reihe erneut Orthogonalreihen sind. Ein wichtiges theoretisches Resultat konnte anschließend in Bezug auf den Zerlegungssatz von $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ erhalten werden, da nun mit Hilfe der neuen Basissysteme bewiesen werden konnte, dass polynomiale Teilmengen der Ausgangssysteme wiederum vollständige Orthonormalsysteme in den orthogonalen Teilräumen der L^2 -Zerlegung sind. Anhand dieses Resultates war es dann ferner möglich, die Orthogonalität der \mathbb{H} -holomorphen Stammfunktionen zum Teilraum der hyperholomorphen Konstanten zu zeigen, wodurch sich dieser nun auch praktisch gesehen eindeutig separieren lässt. Wie man bis zu diesem Punkt der Betrachtungen sehr deutlich zeigen konnte, ließen sich alle Eigenschaften der komplexen Fourierreihe bezüglich der Ableitung und Stammfunktion auch auf den \mathbb{H} -holomorphen Fall übertragen. Folglich stellte sich ganz natürlich die Frage, ob auch im Hyperkomplexen ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen einer Fourierreihe und einer Taylorreihe hergestellt werden kann. Der zentrale Ansatz zur Lösung dieser funktionentheoretisch sehr bedeutenden Fragestellung war die Formulierung der \mathbb{H} -linearen Orthonormalbasis als verallgemeinertes Appell-System. Anhand der strukturellen Eigenschaften der Appell-Polynome ließ sich ein zusätzlicher Differentialoperator definieren, welcher im Wesentlichen dadurch charakterisiert wird, dass sich seine Wirkungsweise zwar nur auf eine Teilmenge des Appell-Systems beschränkt, jedoch auch dort die Appell-Eigenschaft erhält. Dies stellte eine notwendige Voraussetzung für die Konstruktion einer neuartigen Taylorreihe dar, welche nun im Gegensatz zur Taylorreihe der verallgemeinerten Potenzen einen unmittelbaren Bezug zur hyperkomplexen Ableitung der Funktion und zudem die Eigenschaft einer Orthogonalreihe besitzt. Folglich ließen sich auch die Ansatzfunktionen explizit auf einzelne Elemente der Orthonormalbasis zurückführen und damit ein direkter Zusammenhang zur Fourierreihe herstellen. Schließlich wurden diese Funktionensysteme auch im Außengebiet der Einheitskugel studiert, wobei die Kelvin-Transformation als methodischer Ansatz gewählt wurde. Es konnte gezeigt werden, dass die Transformation der Orthonormalbasis im Innengebiet auf direktem Weg eine Orthogonalbasis für das Außengebiet liefert. Der dabei auftretende reelle Normierungsfaktor hängt nur vom Homogenitätsgrad k ab und ist im Vergleich zum Komplexen vermutlich auf die Indexverschiebung $k = n + 2$, $n \in \mathbb{N}_0$ zwischen den inneren und äußeren sphärischen Funktionen zurückzuführen. Da die

strukturellen Eigenschaften der inneren Orthonormalbasis bezüglich der hyperkomplexen Ableitung und Stammfunktion infolge der Kelvin-Transformation qualitativ erhalten bleiben, konnte die Idee der Appell-Funktionen auch auf das Außengebiet übertragen werden. Aufgrund ihrer besonderen Struktureigenschaften lassen sich die äußeren Appell-Funktionen dann rein formal als räumliche Entsprechungen der negativen z -Potenzen betrachten, wodurch die Definition einer (orthogonalen) Laurentreihenentwicklung für das Gebiet der Kugelschale gelang. Unter Verwendung dieser sehr kompakten Reihendarstellung ließ sich schließlich der formelle Zusammenhang zwischen der hier konstruierten Taylorreihe und der Integralformel von Cauchy herstellen und damit eine explizite Darstellung für die n -te Ableitung einer \mathbb{H} -holomorphen Funktion gewinnen.

Zusammenfassend lässt sich daher feststellen, dass im Vergleich zum Funktionensystem der holomorphen z -Potenzen die hier entwickelte Orthonormal- bzw. Appellbasis in $L^2(\Omega; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ alle betrachteten Eigenschaften auf den räumlichen Fall verallgemeinert und damit sehr ähnliche Potenz- und Laurentreihendarstellungen wie im Komplexen ermöglicht. Diese Analogie beschränkt sich nicht nur auf die Eigenschaften der Reihen, sondern spiegelt sich ebenso deutlich in den erhaltenen Ausdrücken wieder. Die dabei auftretenden Koeffizienten hängen im hyperkomplexen Fall nun von zwei Parametern ab, was aufgrund der größeren Anzahl von Ansatzfunktionen vom Homogenitätsgrad k auch zu erwarten war. Beschränkt man sich jedoch, wie an mehreren Stellen der Auswertung gezeigt wurde, auf den Sonderfall¹⁰ $l = 0$, so ergeben sich erwartungsgemäß sehr ähnliche Beziehungen zum Komplexen.

¹⁰Fueter-Sce Erweiterungen der komplexen Monome z^n

Kapitel 4

Approximationsansätze für Problemstellungen der räumlichen Elastizitätstheorie

„Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.“

Kurt Lewin

In diesem Kapitel werden nun die im Vorangegangenen entwickelten funktionentheoretischen Werkzeuge verwendet, um die strukturellen Eigenschaften der in Kapitel 2.3 konstruierten verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln zu studieren. Eine wesentliche Fragestellung ist dabei, ob nun auch mit Hilfe der \mathbb{H} -holomorphen Basissysteme ein vollständiges System für den Raum der quadratisch integrierbaren Lösungen der homogenen Lamé-Gleichung in expliziter Form angegeben werden kann und welche prinzipiellen Eigenschaften für die Funktionen Φ und Ψ daraus abgeleitet werden können. Ferner sollen die in erster Linie strukturbezogenen Aussagen der Ansatzsysteme auch mechanisch interpretiert werden, was insbesondere für die praktische Anwendbarkeit und die Implementierung der räumlichen Darstellungsformeln von besonderer Bedeutung ist. Daher wird außerdem der Unbestimmtheitsgrad der Funktionen Φ und Ψ untersucht, mit dem Ziel, diejenigen Anteile in der Lamé-Lösung zu identifizieren, welche bei Hinzunahme den Spannungszustand des Gesamtkörpers unverändert lassen. Für das \mathcal{A} -wertige Verschiebungsfeld werden dann anhand dieser Betrachtung weitere konstruktive Aussagen hinsichtlich der Zerlegung einer allgemeinen Deformation in eine rein homogene Deformation und eine starre Verschiebung des Gesamtkörpers abgeleitet und Möglichkeiten zur Fixierung

dieser willkürlichen Konstanten angegeben.

Um den Umfang der Arbeit zu begrenzen, werden sich die folgenden Betrachtungen wiederum auf die polynomialen Ansatzsysteme für das Gebiet der Einheitskugel beschränken. Methodisch gesehen ließen sich die nachfolgenden Untersuchungen jedoch in ähnlicher Weise auch für die äußeren Funktionensysteme durchführen.

4.1 Konstruktion einer polynomialen Lamé-Basis

Ziel dieses Abschnitts ist es, mit Hilfe der im letzten Kapitel eingeführten Systeme homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome ein vollständiges Ansatzsystem für die Lamé-Gleichung zu konstruieren, welches im Speziellen die durch die verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln vorgegebene Lösungsstruktur verwendet. Die praktische Motivation leitet sich dabei aus dem Vorgehen im komplexen Fall ab. Durch Potenz- oder Laurentreihenentwicklungen der beiden holomorphen Funktionen lassen sich dort sehr effiziente, analytische Lösungsdarstellungen für eine Vielzahl von Randwertproblemen der Elastostatik approximieren. Der Ausgangspunkt der Betrachtungen in \mathbb{H} ist damit die verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Formel für die Verschiebungen

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\Phi, \Psi) &:= 2G(u + \mathbf{e}_1 v + \mathbf{e}_2 w) \\ &= \mathbf{x} \overline{\partial_0 \Phi} + \mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 \Phi} + \mathbf{z}_2 \overline{\partial_2 \Phi} - \overline{\Psi \partial_0} + \frac{2\alpha - 1}{2} (\Phi - \mathbf{e}_3 \overline{\Phi} \mathbf{e}_3), \end{aligned} \quad (4.1)$$

welche den Verschiebungszustand eines linear elastischen, homogenen, isotropen Körpers in Abhängigkeit zweier monogener Funktionen $\Phi, \Psi \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ beschreibt. Für diese beiden Funktionen werden nun Ansatzsysteme auf der Grundlage der homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome gesucht, welche vollständig bezüglich des Lamé-Systems sind. Wie sich im Folgenden zeigen wird, ist es zunächst zweckmäßiger mit der Basis (3.36) homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome

$$\left\{ X_{n,0}^{0,\dagger}, X_{n,0}^{m,\dagger}, Y_{n,0}^{m,\dagger}, X_{n,3}^{0,\dagger}, X_{n,3}^{l,\dagger}, Y_{n,3}^{l,\dagger} : m = 1, \dots, n+1, l = 1, \dots, n \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

zu arbeiten. Dies stellt gegenüber der Verwendung der Orthonormalbasis keine Einschränkung dar, da das System (3.36) ebenfalls vollständig in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ ist und damit auch Φ, Ψ durch endliche Linearkombinationen dieser Basis beliebig genau approximiert werden können. Folglich ist die Frage nach der Dimension einer polynomialen Lamé-Basis zu klären. Sowohl in [Neuber 1972] als auch in [Bauch 1981]

konnte auf unterschiedlichem Weg gezeigt werden, dass für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ die polynomialen Lösungen des Lamé-Systems von exaktem Grad n einen Unterraum der Dimension $6n + 3$ aufspannen. Approximiert man daher die Funktionen Φ und Ψ durch Linearkombinationen des Systems (3.36), so lässt sich aus der Verschiebungsdarstellung (4.1) die Vollständigkeit der so konstruierten Polynome im Raum der quadratisch integrierbaren Lösungen der Lamé-Gleichung folgern. Mit obigem Ansatzsystem ergeben sich jedoch für jeden festen Grad $n \in \mathbb{N}_0$ genau $8n + 12$ mögliche Lamé-Polynome. Aus Gründen der praktischen Anwendbarkeit ist es daher notwendig, $2n + 9$ linear abhängige Polynome zu bestimmen, so dass für jeden Unterraum des Lamé-Systems vom polynomialen Grad n eine Basis der Dimension $6n + 3$ angegeben werden kann.

Lemma 4.1. *In jedem Unterraum von polynomialen Lösungen des homogenen Lamé-Systems (1.13) vom exakten Grad $n \in \mathbb{N}_0$, generiert durch die verallgemeinerte Kolosov-Muskhelishvili Verschiebungsgleichung (4.1), ergeben sich die folgenden Abhängigkeiten:*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}\left(X_{n,0}^{n+1,\dagger}, 0\right) &= \frac{2\alpha - n - 1}{2n + 3} \mathcal{U}\left(0, X_{n+1,0}^{n+1,\dagger}\right), \\ \mathcal{U}\left(Y_{n,0}^{n+1,\dagger}, 0\right) &= \frac{2\alpha - n - 1}{2n + 3} \mathcal{U}\left(0, Y_{n+1,0}^{n+1,\dagger}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}\left(X_{n,3}^{n,\dagger}, 0\right) &= -\frac{2\alpha - n - 1}{4(n + 1)} \mathcal{U}\left(0, Y_{n+1,0}^{n,\dagger}\right) - \frac{1}{2} \mathcal{U}\left(Y_{n,0}^{n,\dagger}, 0\right), \\ \mathcal{U}\left(Y_{n,3}^{n,\dagger}, 0\right) &= \frac{2\alpha - n - 1}{4(n + 1)} \mathcal{U}\left(0, X_{n+1,0}^{n,\dagger}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{U}\left(X_{n,0}^{n,\dagger}, 0\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}\left(0, X_{n+1,0}^{n+2,\dagger}\right) &= \mathcal{U}\left(0, Y_{n+1,0}^{n+2,\dagger}\right) = 0, \\ \mathcal{U}\left(0, X_{n+1,3}^{0,\dagger}\right) &= \mathcal{U}\left(0, X_{n+1,3}^{k,\dagger}\right) = \mathcal{U}\left(0, Y_{n+1,3}^{k,\dagger}\right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

mit $k = 1, \dots, n + 1$.

Beweis. Es wird mit dem Beweis der ersten Gleichung in (4.2) begonnen. Nach (4.1) ergibt sich für die linke Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\left(X_{n,0}^{n+1,\dagger}, 0\right) &= \mathbf{x} \overline{\partial_0 X_{n,0}^{n+1,\dagger}} + \mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 X_{n,0}^{n+1,\dagger}} + \mathbf{z}_2 \overline{\partial_2 X_{n,0}^{n+1,\dagger}} \\ &\quad + \frac{2\alpha - 1}{2} \left(X_{n,0}^{n+1,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}} \mathbf{e}_3 \right). \end{aligned}$$

Aus $X_{n,0}^{n+1,\dagger} \in \mathcal{A}$ und $X_{n,0}^{n+1,\dagger} \in \ker \bar{\partial}$ lässt sich bekanntlich folgern, dass $\overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}} \in \ker \partial$. Verwendet man ferner die Beziehungen (3.32), so reduziert sich die letzte Gleichung auf

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\left(X_{n,0}^{n+1,\dagger}, 0\right) &= \underbrace{(2n+1)(n+1)\left(\mathbf{z}_1 \overline{X_{n-1,0}^{n,\dagger}} - \mathbf{z}_2 \overline{Y_{n-1,0}^{n,\dagger}}\right)}_{\equiv n \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}}} \\ &\quad + \frac{2\alpha-1}{2} \underbrace{\left(X_{n,0}^{n+1,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}} \mathbf{e}_3\right)}_{\equiv 2 X_{n,0}^{n+1,\dagger}} \\ &= n \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}} + (2\alpha-1) X_{n,0}^{n+1,\dagger}. \end{aligned}$$

Nun werden zuerst die Beziehungen (3.32) und danach die Beziehungen (3.22) auf die rechte Seite der ersten Gleichung in (4.2) angewendet, wodurch man

$$\frac{2\alpha-n-1}{2n+3} \mathcal{U}\left(0, X_{n+1,0}^{n+1,\dagger}\right) = -\frac{2\alpha-n-1}{2n+3} \overline{X_{n+1,0}^{n+1,\dagger} \partial_0} = -(2\alpha-n-1) \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}}$$

erhält. Da $X_{n,0}^{n+1,\dagger} \in \mathcal{A}$ und $\mathbf{Sc}\left(X_{n,0}^{n+1,\dagger}\right) = 0$, gilt außerdem $\overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}} = -X_{n,0}^{n+1,\dagger}$, wonach sich schließlich der Beweis der ersten Gleichung in (4.2) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\left(X_{n,0}^{n+1,\dagger}, 0\right) &= \frac{2\alpha-n-1}{2n+3} \mathcal{U}\left(0, X_{n+1,0}^{n+1,\dagger}\right) \\ \Leftrightarrow n \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}} + (2\alpha-1) X_{n,0}^{n+1,\dagger} &= -(2\alpha-n-1) \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}} \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{!}{=} (2\alpha-1) \left(X_{n,0}^{n+1,\dagger} + \overline{X_{n,0}^{n+1,\dagger}}\right) = 0 \end{aligned}$$

ergibt. Analog wird bei der zweiten Gleichung in (4.2) vorgegangen.

Als Nächstes wird die erste Gleichung in (4.3) bewiesen, wonach also

$$\mathcal{U}\left(X_{n,3}^{n,\dagger}, 0\right) = -\frac{2\alpha-n-1}{4(n+1)} \mathcal{U}\left(0, Y_{n+1,0}^{n,\dagger}\right) - \frac{1}{2} \mathcal{U}\left(Y_{n,0}^{n,\dagger}, 0\right)$$

zu zeigen ist. Mit (3.30) und (3.32) ergeben sich für die Auswertung der einzelnen Funktionen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\left(X_{n,3}^{n,\dagger}, 0\right) &= \overline{\mathbf{x} \partial_0 X_{n,3}^{n,\dagger}} + \mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 X_{n,3}^{n,\dagger}} + \mathbf{z}_2 \overline{\partial_2 X_{n,3}^{n,\dagger}} + \frac{2\alpha-1}{2} \left(X_{n,3}^{n,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{X_{n,3}^{n,\dagger}} \mathbf{e}_3\right) \\ &= -n(2n+1) \left[\frac{\mathbf{x}}{n} \overline{X_{n-1,3}^{n,\dagger}} - \mathbf{z}_1 \overline{X_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} + \mathbf{z}_2 \overline{Y_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} \right] \\ &\quad + \frac{2\alpha-1}{2} \left(X_{n,3}^{n,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{X_{n,3}^{n,\dagger}} \mathbf{e}_3\right), \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}\left(0, Y_{n+1,0}^{n,\dagger}\right) = -\overline{Y_{n+1,0}^{n,\dagger} \partial_0} = -2(n+1) \overline{Y_{n,0}^{n,\dagger}}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(Y_{n,0}^{n,\dagger}, 0) &= \mathbf{x} \overline{\partial_0 Y_{n,0}^{n,\dagger}} + \mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 Y_{n,0}^{n,\dagger}} + \mathbf{z}_2 \overline{\partial_2 Y_{n,0}^{n,\dagger}} + \frac{2\alpha - 1}{2} (Y_{n,0}^{n,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{Y_{n,0}^{n,\dagger}} \mathbf{e}_3) \\ &= n(2n + 1) \left[\mathbf{z}_1 \overline{Y_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} + \mathbf{z}_2 \overline{X_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} \right] + (2\alpha - 1) Y_{n,0}^{n,\dagger}.\end{aligned}$$

Nach Substitution dieser Terme in der Ausgangsgleichung erhält man

$$\begin{aligned}& -n(2n + 1) \left[\frac{\mathbf{x}}{n} \overline{X_{n-1,3}^{n,\dagger}} - \mathbf{z}_1 \overline{X_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} + \mathbf{z}_2 \overline{Y_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} \right] + \frac{2\alpha - 1}{2} (X_{n,3}^{n,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{X_{n,3}^{n,\dagger}} \mathbf{e}_3) \\ &= \frac{2\alpha - n - 1}{2} \overline{Y_{n,0}^{n,\dagger}} - \frac{n(2n + 1)}{2} \left[\mathbf{z}_1 \overline{Y_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} + \mathbf{z}_2 \overline{X_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} \right] - \frac{2\alpha - 1}{2} Y_{n,0}^{n,\dagger}\end{aligned}$$

und nach Umordnung die Darstellung

$$\begin{aligned}n(2n + 1) & \left[\mathbf{z}_1 \left(\overline{X_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} + \frac{1}{2} \overline{Y_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} \right) - \mathbf{z}_2 \left(\overline{Y_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} - \frac{1}{2} \overline{X_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} \right) - \frac{\mathbf{x}}{n} \overline{X_{n-1,3}^{n,\dagger}} \right] \\ &= -\frac{2\alpha - 1}{2} (X_{n,3}^{n,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{X_{n,3}^{n,\dagger}} \mathbf{e}_3 + Y_{n,0}^{n,\dagger} - \overline{Y_{n,0}^{n,\dagger}}) - \frac{n}{2} \overline{Y_{n,0}^{n,\dagger}}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Für den Term auf der linken Seite von Gleichung (4.5) lässt sich nach längerer Rechnung die Identität

$$-\frac{n}{2} \overline{Y_{n,0}^{n,\dagger}} = n(2n + 1) \left[\mathbf{z}_1 \left(\overline{X_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} + \frac{1}{2} \overline{Y_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} \right) - \mathbf{z}_2 \left(\overline{Y_{n-1,3}^{n-1,\dagger}} - \frac{1}{2} \overline{X_{n-1,0}^{n-1,\dagger}} \right) - \frac{\mathbf{x}}{n} \overline{X_{n-1,3}^{n,\dagger}} \right]$$

zeigen, wonach sich Gleichung (4.5) zu

$$0 \stackrel{!}{=} X_{n,3}^{n,\dagger} - \mathbf{e}_3 \overline{X_{n,3}^{n,\dagger}} \mathbf{e}_3 + Y_{n,0}^{n,\dagger} - \overline{Y_{n,0}^{n,\dagger}} \quad (4.6)$$

vereinfacht. Es sei nun $[f]_i$ die \mathbf{e}_i -Koordinate einer Funktion $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$, mit $i = 0, 1, 2, 3$. Dann lässt sich die Beziehung (4.6) äquivalent durch

$$0 \stackrel{!}{=} \left[X_{n,0}^{n,\dagger} \right]_2 \mathbf{e}_1 - \left[X_{n,0}^{n,\dagger} \right]_1 \mathbf{e}_2 + \left[Y_{n,0}^{n,\dagger} \right]_1 \mathbf{e}_1 + \left[Y_{n,0}^{n,\dagger} \right]_2 \mathbf{e}_2$$

angeben. Unter Verwendung der expliziten Darstellungsformeln (3.16) und (3.17) erhält man schließlich

$$\begin{aligned}0 & \stackrel{!}{=} \left(\left[X_{n,0}^{n,\dagger} \right]_2 + \left[Y_{n,0}^{n,\dagger} \right]_1 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\left[Y_{n,0}^{n,\dagger} \right]_2 - \left[X_{n,0}^{n,\dagger} \right]_1 \right) \mathbf{e}_2 \\ \Leftrightarrow 0 & \stackrel{!}{=} (B^{n,n} + C^{n,n}) \left[(\cos \varphi \sin n\varphi + \sin \varphi \cos n\varphi) \mathbf{e}_1 \right. \\ & \quad \left. + (\sin \varphi \sin n\varphi - \cos \varphi \cos n\varphi) \mathbf{e}_2 \right] \\ \Leftrightarrow 0 & \stackrel{!}{=} B^{n,n} + C^{n,n} = 0.\end{aligned}$$

Dies ist leicht einzusehen, da es sich hierbei um einen Sonderfall der bereits im vorangegangenen Kapitel bewiesenen Beziehung (3.25) handelt. Damit ist die erste Gleichung in (4.3) vollständig gezeigt. Auf gleichem Weg lässt sich auch die zweite Gleichung in (4.3) beweisen, wodurch auf einen ausführlichen Beweis verzichtet werden kann.

Abschließend sollen die verbleibenden Beziehungen (4.4) betrachtet werden. Der Beweis lässt sich hierbei unmittelbar aus den strukturellen Eigenschaften der Polynome ableiten. Wie man sich leicht überzeugt, besitzt jedes in den Gleichungen (4.4) auftretende monogene Ansatzpolynom $f \in C^1(\Omega; \mathbb{H})$ der Basis (3.36) die Eigenschaft, dass $\mathbf{Sc}(f) = 0$ ist. Damit folgt sofort $\mathcal{U}(0, f) = -\overline{f\partial_0} = 0$. \square

Anhand des Lemmas 4.1 ist es nun möglich, $2n + 9$ polynomiale Lösungen des Lamé-Systems zu benennen, welche aus der Menge der $8n + 12$ Ansatzfunktionen zum exakten Grad $n \in \mathbb{N}_0$ entfernt werden können. Strukturell gesehen lassen sich die Abhängigkeiten nach Lemma 4.1 in zwei Gruppen unterteilen. Zur ersten Gruppe gehören die Lamé-Polynome in den Beziehungen (4.2) und (4.3), welche durch lineare Abhängigkeiten zu anderen Ansatzfunktionen charakterisiert werden. Eine zweite Gruppe bilden die Polynome der Beziehung (4.4), da diese bereits im Kern der Verschiebungsgleichung $\mathcal{U}(\Phi, \Psi)$ liegen. Somit können verschiedene Möglichkeiten für die Wahl der $6n + 3$ Basisfunktionen des Lamé-Systems angegeben werden, wobei sich aber die Alternativen ausschließlich auf die erste Gruppe mit den Beziehungen (4.2) und (4.3) beschränken. Unter Verwendung der Basis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome (3.36) lässt sich eine Lamé-Basis wie folgt angeben.

Theorem 4.1. *Das System*

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathcal{U}(0, X_{1,0}^{0,\dagger}), \mathcal{U}(0, X_{1,0}^{1,\dagger}), \mathcal{U}(0, Y_{1,0}^{1,\dagger}), \mathcal{U}(X_{n,0}^{0,\dagger}, 0), \mathcal{U}(X_{n,0}^{k,\dagger}, 0), \mathcal{U}(Y_{n,0}^{k,\dagger}, 0), \\ &\mathcal{U}(X_{n,3}^{0,\dagger}, 0), \mathcal{U}(X_{n,3}^{l,\dagger}, 0), \mathcal{U}(Y_{n,3}^{l,\dagger}, 0), \mathcal{U}(0, X_{n+1,0}^{0,\dagger}), \mathcal{U}(0, X_{n+1,0}^{m,\dagger}), \\ &\mathcal{U}(0, Y_{n+1,0}^{m,\dagger}) : k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n-1, m = 1, \dots, n+1 \end{aligned} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

auf der Grundlage der Basis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome (3.36) ist vollständig im Raum der quadratisch integrierbaren Lösungen der homogenen Lamé-Gleichung (1.12).

Beweis. Aus der Dimension $6n + 3$ des Unterraumes aller polynomialen Lamé-Lösungen vom festen Grad $n \in \mathbb{N}_0$ [Neuber 1972, Bauch 1981] und aus Lemma 4.1 folgt der Beweis des Theorems. \square

Bemerkung 4.1. An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass die getroffene Auswahl der Basispolynome bezüglich der Funktion Φ in erster Linie durch Vollständigkeitsaussagen der hyperkomplexen Ableitung des Ausgangssystems (3.36) motiviert war (q.v. [Cação et al. 2006]). Für die Lamé-Lösungen vom exakten Grad $n \in \mathbb{N}_0$ ergeben sich damit für die Funktion Φ genau $4n$ Ansatzfunktionen vom Grad n und für die Funktion Ψ dementsprechend $2n + 3$ Ansatzfunktionen vom Grad $n + 1$. Letzteres war in gewisser Weise auch zu erwarten, da die Funktion Ψ entsprechend des verallgemeinerten Darstellungssatzes von Goursat (2.31) unmittelbar mit einer harmonischen Funktion in Beziehung gesetzt wird und damit zu $\dim \mathcal{H}_{n+1}(S^2) = 2n + 3$ korrespondiert.

Auf der Grundlage des Theorems 4.1 ist es nun analog zum Komplexen möglich, die Lösung von Randwertaufgaben der linearen Elastizitätstheorie mit Hilfe von polynomialen Reihenansätzen hinreichend genau zu approximieren. Die Verwendung des linear unabhängigen Systems (3.36) zur Darstellung der Lamé-Basis hat jedoch den Nachteil, dass einige strukturellen Eigenschaften der Ansatzsysteme verloren gehen. Diese allgemeine Charakterisierung ist aber genau dann von Bedeutung, wenn andere polynomialen Ansatzsysteme zur Beschreibung der Funktionen Φ und Ψ verwendet werden sollen. In diesem Zusammenhang stelle man sich beispielsweise Ansatzsysteme vor, die nach Anwendung der Kelvin-Transformation auf Funktionensysteme mit speziellen Singularitätseigenschaften führen. Um dabei jedoch den aufwendigen Prozess der Bestimmung der linearen Abhängigkeiten des Ausgangssystems zu vermeiden, ist eine strukturelle Klassifikation der monogenen Ausgangsfunktionen von besonderem Interesse. Dies gelingt nun unter Verwendung des im vorangegangenen Kapitel entwickelten Orthonormalsystems (3.38). Hierzu wird zunächst für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ die normierte Teilmenge der Basis (3.36) mit

$$\{\psi_n^k\}_{k=1,\dots,2n+3} = \left\{ \begin{matrix} 1^0 & 2^m & 3^m \\ \psi_n & \psi_n & \psi_n \end{matrix} \right\}_{m=1,\dots,n+1} = \left\{ \tilde{X}_{n,0}^{0,\dagger}, \tilde{X}_{n,0}^{m,\dagger}, \tilde{Y}_{n,0}^{m,\dagger} \right\}_{m=1,\dots,n+1}$$

bezeichnet. Dieses System ist bekanntlich vollständig im reell-linearen Unterraum \mathcal{A} von \mathbb{H} .

Theorem 4.2 (nach [Cação 2004]). *Das System $\{\psi_n^k : k = 1, \dots, 2n + 3\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome ist eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$.*

Unter Beachtung der Beziehungen (4.4) wird für die Funktion Φ der Ansatz $\{\varphi_{n,\mathbb{R}}^l : l = 1, \dots, 4n + 4\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ und für die Funktion Ψ der bereits reduzierten An-

satz $\{\psi_n^k : k = 1, \dots, 2n+3\}_{n \in \mathbb{N}}$ gemacht. Die zu diesen Ansätzen korrespondierenden Lamé-Lösungen werden im Folgenden untersucht.

Lemma 4.2. *Für das System $\{\mathcal{U}(\varphi_{n,\mathbb{R}}^l, 0), \mathcal{U}(0, \psi_{n+1}^k)\}_{(l=1, \dots, 4n+4, k=1, \dots, 2n+5)}$ von polynomialen Lösungen des homogenen Lamé-Systems (1.13) vom exakten Grad $n \in \mathbb{N}_0$ ergeben sich die folgenden Abhängigkeiten:*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^{n+1}, 0\right) &= -(n+1-2\alpha) \sqrt{\frac{n+2}{(2n+5)(n+1)}} \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 2 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^{n+1}\right), \\ \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^{n+1}, 0\right) &= (n+1-2\alpha) \sqrt{\frac{n+2}{(2n+5)(n+1)}} \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 3 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^{n+1}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^n, 0\right) &= \frac{n+1-2\alpha}{3} \sqrt{\frac{(2n+3)(n+2)}{2(2n+5)(n+1)}} \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 3 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^n\right) - \frac{\sqrt{2n+1}}{3} \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^n, 0\right), \\ \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^n, 0\right) &= \frac{n+1-2\alpha}{3} \sqrt{\frac{(2n+3)(n+2)}{2(2n+5)(n+1)}} \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 2 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^n\right) + \frac{\sqrt{2n+1}}{3} \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^n, 0\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

und

$$\mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 2 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^{n+2}\right) = \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 3 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^{n+2}\right) = 0. \quad (4.9)$$

Beweis. Der Beweisansatz entspricht dem von Lemma 4.1 und kann daher auf ähnliche Weise nachvollzogen werden. \square

Aus den Beziehungen (4.7)-(4.9) folgt damit:

Theorem 4.3. *Das System*

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 1 \\ \psi_1 \end{smallmatrix}^0\right), \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 2 \\ \psi_1 \end{smallmatrix}^1\right), \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 3 \\ \psi_1 \end{smallmatrix}^1\right), \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^0, 0\right), \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^k, 0\right), \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^k, 0\right), \\ &\mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^0, 0\right), \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^l, 0\right), \mathcal{U}\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ \varphi_n \end{smallmatrix}^l, 0\right), \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 1 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^0\right), \mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 2 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^m\right), \\ &\mathcal{U}\left(0, \begin{smallmatrix} 3 \\ \psi_{n+1} \end{smallmatrix}^m\right), : k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n-1, m = 1, \dots, n+1 \end{aligned} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

auf der Grundlage der Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -holomorpher Polynome (3.38) ist vollständig im Raum der quadratisch integrierbaren Lösungen der homogenen Lamé-Gleichung (1.12).

Beweis. Analog zu Theorem 4.1. \square

Korollar 4.1. *Nach Theorem 4.3 können die \mathbb{H} -holomorphen Ansatzfunktionen Φ , Ψ der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln (2.38)-(2.41) allgemein durch*

$\Phi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial})$ und $\Psi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial})$ charakterisiert werden.

Beweis. Zunächst ist festzustellen, dass die polynomialen Ansatzsysteme für Φ , Ψ in den jeweiligen Funktionenräumen eine Orthonormalbasis bilden. Betrachtet man die Lamé-Polynome jeweils auf den linken Seiten der Gleichungen in Lemma 4.2, so gehören die Ansatzfunktionen $\left\{ \varphi_n^{2n+1}, \varphi_n^{3n+1}, \varphi_n^{5n}, \varphi_n^{6n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left\{ \psi_{n+1}^{2n+2}, \psi_{n+1}^{3n+2} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ allesamt zur Menge der monogenen Konstanten. Für die Funktion Φ bilden diese Polynome nach Theorem 3.11 eine Basis im unendlich dimensionalen Teilraum $\ker \partial \cap \ker \bar{\partial}$, wodurch also $\Phi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial})$ folgt. Entsprechend lässt sich auch im Fall der Funktion Ψ argumentieren, da hier die Menge $\left\{ 1, \psi_n^{2n+1}, \psi_n^{3n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis im unendlich dimensionalen Teilraum der monogenen Konstanten in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}) \cap \ker \bar{\partial}$ ist. \square

4.2 Unbestimmtheitsgrad der Funktionen Φ und Ψ

Es soll sich nun mit der Frage beschäftigt werden, inwieweit sich zwei beliebige monogene Funktionen $\Phi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial})$ und $\Psi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial})$ durch die Vorgabe des Spannungszustandes bzw. der Verschiebungen der Punkte des Körpers eindeutig bestimmen lassen. Gesucht sind also die Anteile der Funktionen Φ und Ψ , welche im Kern der Spannungsfunktionen liegen. Da das im vorangegangenen Abschnitt konstruierte System eine Basis im Raum der quadratisch integrierbaren Lamé-Lösungen ist, kann es sich bei den gesuchten Anteilen bekanntermaßen nur um lineare Funktionen handeln. Zuerst wird die Bestimmtheit der Funktionen Φ und Ψ bei vorgegebenem Spannungszustand untersucht, indem für den linearen Anteil ein allgemeiner Ansatz in den jeweiligen Basissystemen gemacht wird. Aus Symmetriegründen und entgegen Korollar 4.1 werden für den allgemeinen linearen Ansatz auch diejenigen monogenen Konstanten angesetzt, welche nicht im Kern der Verschiebungsgleichung liegen (q.v. Lemma 4.2). Um die dabei entstehenden Ausdrücke möglichst einfach zu halten, werden außerdem geeignete reelle Vielfache der unnormierten Basiselemente verwendet.

4.2.1 Vorgabe des Spannungszustandes

Zuerst werden die Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ als vorgegeben betrachtet. Nach Konstruktion sind diese durch die folgenden Beziehungen mit Φ, Ψ verknüpft:

$$\mathcal{S}_I(\Phi, \Psi) := \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (4 - \alpha) (\partial_0 \Phi + \overline{\partial_0 \Phi}) = 2(4 - \alpha) \mathbf{Sc}[\partial_0 \Phi], \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{II}(\Phi, \Psi) &:= \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + 2\mathbf{e}_1 \tau_{xy} + 2\mathbf{e}_2 \tau_{xz} \\ &= 2 \left[\mathbf{x} \overline{\partial_0 \partial_0 \Phi} + \mathbf{z}_1 \overline{\partial_0 \partial_1 \Phi} + \mathbf{z}_2 \overline{\partial_0 \partial_2 \Phi} - \overline{\Psi \partial_0 \partial_0} \right] \\ &\quad + (\alpha - 2) (\partial_0 \Phi + \overline{\partial_0 \Phi}) + (\alpha - 1) (\overline{\partial_0 \Phi} + \mathbf{e}_3 \overline{\partial_0 \Phi} \mathbf{e}_3), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{III}(\Phi, \Psi) &:= 2\tau_{xy} + \mathbf{e}_1(-\sigma_x + \sigma_y - \sigma_z) + 2\mathbf{e}_2 \tau_{yz} \\ &= 2 \left[\mathbf{x} \overline{\partial_1 \partial_0 \Phi} + \mathbf{z}_1 \overline{\partial_1 \partial_1 \Phi} + \mathbf{z}_2 \overline{\partial_1 \partial_2 \Phi} - \overline{\Psi \partial_1 \partial_0} \right] + (2 - \alpha) \overline{\partial_1 \Phi} \\ &\quad + 2\mathbf{e}_1 \overline{\partial_0 \Phi} - \alpha (\mathbf{e}_1 \partial_0 \Phi + \mathbf{e}_3 \overline{\partial_2 \Phi}) + (\alpha - 1) (\partial_1 \Phi - \mathbf{e}_3 \overline{\partial_1 \Phi} \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Unbestimmtheitsgrad der Funktion Φ

Nach Theorem 4.3 ist der Unbestimmtheitsgrad der monogenen Funktion Φ gleichbedeutend mit der Bestimmung desjenigen linearen Anteils der Funktion, welcher im Kern aller Spannungsfunktionen (4.10)-(4.12) liegt. Daher wird zunächst Ψ zu Null gesetzt und für Φ der in $\mathcal{M}_0(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cup \mathcal{M}_1(\mathbb{B}_3; \mathbb{H})$ vollständige Ansatz

$$\Phi_{\text{linear}} := 2 X_{0,0}^{0,\dagger} \gamma_0 + X_{1,0}^{0,\dagger} \gamma_1 + \frac{1}{3} (X_{1,0}^{1,\dagger} - Y_{1,3}^{1,\dagger}) \gamma_2$$

gemacht, wobei $\gamma_i = \sum_{j=0}^3 \gamma_i^j \mathbf{e}_j$ und $\gamma_i^j \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2$. Setzt man diesen Ansatz in die Spannungsgleichungen (4.10)-(4.12) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem in den Koeffizienten γ_i^j :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_I(\Phi_{\text{linear}}, 0) &\stackrel{!}{=} 0 = 2(4 - \alpha) \gamma_1^0, \\ \mathcal{S}_{II}(\Phi_{\text{linear}}, 0) &\stackrel{!}{=} 0 = 2(2 - \alpha) \gamma_1^0 + (\alpha - 1) [(\gamma_1^1 + \gamma_2^0) \mathbf{e}_1 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^3) \mathbf{e}_2], \\ \mathcal{S}_{III}(\Phi_{\text{linear}}, 0) &\stackrel{!}{=} 0 = (1 - \alpha) (\gamma_1^1 + \gamma_2^0) + 2[(\alpha - 1) \gamma_2^1 - \gamma_1^0] \mathbf{e}_1 + 2(\alpha - 1) \gamma_2^2 \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems lassen sich im obigen Ansatz die Koeffizienten

$$\gamma_1^0 = \gamma_2^1 = \gamma_2^2 = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_1^1 = -\gamma_2^0, \quad \gamma_1^2 = -\gamma_2^3$$

festlegen. Nach geeigneter Umbenennung der Koeffizienten und einfacher Umordnung ergibt sich die gesuchte Spannungskernfunktion für die Funktion Φ zu

$$\Phi_{\ker} = \sum_{j=0}^3 \xi_j \mathbf{e}_j - \mathbf{z}_1 (\xi_4 + \xi_6 \mathbf{e}_2) - \mathbf{z}_2 (\xi_5 - \xi_6 \mathbf{e}_1),$$

mit $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, 6$. Nach Voraussetzung besitzt diese die Eigenschaft, dass

$$\mathcal{S}_I(\Phi_{\ker}, 0) = \mathcal{S}_{II}(\Phi_{\ker}, 0) = \mathcal{S}_{III}(\Phi_{\ker}, 0) = 0.$$

Unbestimmtheitsgrad der Funktion Ψ

Für die Funktion Ψ wird analog vorgegangen und dementsprechend die Funktion Φ zu Null gesetzt. Der allgemeine Ansatz für die Funktion Ψ lautet dann

$$\Psi_{\text{linear}} := X_{1,0}^{0,\dagger} \delta_0 - \frac{2}{3} X_{1,0}^{1,\dagger} \delta_1 - \frac{2}{3} Y_{1,0}^{1,\dagger} \delta_2,$$

wobei $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$. Wie eingangs erwähnt, werden dabei nur diejenigen Anteile berücksichtigt, welche nicht im Kern der Verschiebungsgleichung¹ liegen. Der Ansatz ist demzufolge vollständig im Teilraum $(\mathcal{M}_0(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}) \cup \mathcal{M}_1(\mathbb{B}_3; \mathcal{A})) \perp (\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial})$. Durch Einsetzen der linearen Ansatzfunktion Ψ_{linear} in die Spannungsgleichungen (4.10)-(4.12) erhält man nach einfacher Rechnung

$$\mathcal{S}_I(0, \Psi_{\text{linear}}) = \mathcal{S}_{II}(0, \Psi_{\text{linear}}) = \mathcal{S}_{III}(0, \Psi_{\text{linear}}) = 0.$$

Damit lässt sich die gesuchte Spannungskernfunktion für Ψ in der Form

$$\Psi_{\ker} = -\mathbf{z}_1 \left(\delta_1 - \frac{\delta_0}{2} \mathbf{e}_1 \right) - \mathbf{z}_2 \left(\delta_2 - \frac{\delta_0}{2} \mathbf{e}_2 \right)$$

angeben. Diese ist äquivalent zum linearen Ansatz Ψ_{linear} und es gilt

$$\mathcal{S}_I(0, \Psi_{\ker}) = \mathcal{S}_{II}(0, \Psi_{\ker}) = \mathcal{S}_{III}(0, \Psi_{\ker}) = 0.$$

Evaluierung der Ergebnisse bei vorgegebenem Spannungszustand

An dieser Stelle werden die erhaltenen Resultate zunächst kurz zusammengefasst. Die Auswertungen zum Unbestimmtheitsgrad der Funktionen $\Phi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial})$ und $\Psi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial})$ in den verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln haben ergeben, dass bei vorgegebenem

¹cf. Lemma 4.2

Spannungszustand

- die Funktion Φ bis auf die lineare Funktion

$$\Phi_{\text{ker}} = \sum_{j=0}^3 \xi_j \mathbf{e}_j - \mathbf{z}_1 (\xi_4 + \xi_6 \mathbf{e}_2) - \mathbf{z}_2 (\xi_5 - \xi_6 \mathbf{e}_1),$$

- die hyperkomplexe Ableitung der Funktion Φ bis auf die additive \mathbb{H} -wertige Konstante $\partial_0 \Phi_{\text{ker}} = \xi_4 \mathbf{e}_1 + \xi_5 \mathbf{e}_2 + 2 \xi_6 \mathbf{e}_3$,
- die Funktion Ψ bis auf die lineare Funktion

$$\Psi_{\text{ker}} = -\mathbf{z}_1 \left(\delta_1 - \frac{\delta_0}{2} \mathbf{e}_1 \right) - \mathbf{z}_2 \left(\delta_2 - \frac{\delta_0}{2} \mathbf{e}_2 \right)$$

- und die hyperkomplexe Ableitung der Funktion Ψ bis auf die additive \mathbb{H} -wertige Konstante $\partial_0 \Psi_{\text{ker}} = \delta_0 + \delta_1 \mathbf{e}_1 + \delta_2 \mathbf{e}_2$

bestimmt sind, wobei $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, 6$ und $\delta_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, 2$. Umgekehrt ändert sich der Spannungszustand des Gesamtkörpers offenbar nicht, wenn man

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{durch} \quad \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^3 \xi_j \mathbf{e}_j - \mathbf{z}_1 (\xi_4 + \xi_6 \mathbf{e}_2) - \mathbf{z}_2 (\xi_5 - \xi_6 \mathbf{e}_1), \\ \Psi(\mathbf{x}) \quad \text{durch} \quad \Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{z}_1 \left(\delta_1 - \frac{\delta_0}{2} \mathbf{e}_1 \right) - \mathbf{z}_2 \left(\delta_2 - \frac{\delta_0}{2} \mathbf{e}_2 \right) \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

und im Falle der hyperkomplexen Ableitungen

$$\left. \begin{array}{l} \partial_0 \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{durch} \quad \partial_0 \Phi(\mathbf{x}) + \xi_4 \mathbf{e}_1 + \xi_5 \mathbf{e}_2 + 2 \xi_6 \mathbf{e}_3, \\ \partial_0 \Psi(\mathbf{x}) \quad \text{durch} \quad \partial_0 \Psi(\mathbf{x}) + \delta_0 + \delta_1 \mathbf{e}_1 + \delta_2 \mathbf{e}_2 \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

ersetzt.

4.2.2 Vorgabe der Verschiebungskomponenten

Nun sollen die Verschiebungskomponenten u , v , w als vorgegeben betrachtet werden. Dabei ist zu untersuchen, inwieweit sich die Zahl der willkürlichen Konstanten in den betrachteten Funktionen Φ und Ψ vermindert. Bekanntlich sind die Spannungskomponenten durch Vorgabe der Verschiebungskomponenten eindeutig bestimmt, was also bedeutet, dass keine anderen Terme als die in (4.13) auftreten können. Somit ist die Frage zu klären, ob die willkürlichen Terme Φ_{ker} und Ψ_{ker} einen Einfluss

auf die Verschiebungskomponenten haben und wenn ja, ob sich dieser mechanisch interpretieren lässt. Dazu werden die Funktionen $\Phi_1 = \Phi + \Phi_{\text{ker}}$ und $\Psi_1 = \Psi + \Psi_{\text{ker}}$ betrachtet. Durch Einsetzen der Ansätze in die Verschiebungsgleichung (4.1) erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}(\Phi_1, \Psi_1) &= \mathcal{U}(\Phi, \Psi) + \mathcal{U}(\Phi_{\text{ker}}, \Psi_{\text{ker}}) \\
 &= 2G(u + \mathbf{e}_1 v + \mathbf{e}_2 w) + 2G(u_0 + \mathbf{e}_1 v_0 + \mathbf{e}_2 w_0) \\
 &= 2G(u + \mathbf{e}_1 v + \mathbf{e}_2 w) - 2\alpha(\xi_4 y + \xi_5 z) + (2\alpha - 1)\xi_0 - \delta_0 \\
 &\quad + \mathbf{e}_1 \left[2\alpha(\xi_4 x + \xi_6 z) + (2\alpha - 1)\xi_1 + \delta_1 \right] \\
 &\quad + \mathbf{e}_2 \left[2\alpha(\xi_5 x - \xi_6 y) + (2\alpha - 1)\xi_2 + \delta_2 \right].
 \end{aligned}$$

Wie man erkennt, ergeben sich neben den Verschiebungskomponenten u, v, w zusätzliche Anteile der Form

$$\begin{aligned}
 u_0 &= -\frac{\alpha \xi_4}{G} y - \frac{\alpha \xi_5}{G} z + \frac{(2\alpha - 1)\xi_0 - \delta_0}{2G}, \\
 v_0 &= \frac{\alpha \xi_4}{G} x + \frac{\alpha \xi_6}{G} z + \frac{(2\alpha - 1)\xi_1 + \delta_1}{2G}, \\
 w_0 &= \frac{\alpha \xi_5}{G} x - \frac{\alpha \xi_6}{G} y + \frac{(2\alpha - 1)\xi_2 + \delta_2}{2G},
 \end{aligned}$$

welche bekanntlich starre Verschiebungen des Gesamtkörpers² ausdrücken. Da nach (4.13) die willkürlichen Terme Φ_{ker} und Ψ_{ker} im Kern der Spannungsfunktionen liegen, also mit anderen Worten den Spannungszustand des Gesamtkörpers unverändert lassen, können die mit diesen Anteilen verknüpften Verschiebungskomponenten auch nur Starrkörperbewegungen³ beschreiben. Wegen (4.13) und (4.14) werden zunächst die Bezeichnungen

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^3 \xi_j \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\xi}' = \xi_4 \mathbf{e}_1 + \xi_5 \mathbf{e}_2 + 2\xi_6 \mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\delta} = \delta_0 + \delta_1 \mathbf{e}_1 + \delta_2 \mathbf{e}_2$$

eingeführt. Unter Verwendung dieser Notation lässt sich nun rein formal feststellen, dass eine Substitution vom Typ (4.13) nur dann ohne Veränderung der Verschiebungen durchgeführt werden kann, wenn

$$\boldsymbol{\xi}' = 0 \quad \text{und} \quad (2\alpha - 1)\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{\delta}} = 0$$

²cf. Kapitel 1.1.2

³Translation, Rotation

gilt. Demzufolge können die Konstanten ξ, ξ', δ bei vorgegebenen Verschiebungen nicht willkürlich gewählt werden, da bereits nach Vorgabe einer der Konstanten ξ, δ die jeweils andere festgelegt wird.

4.2.3 Eindeutige Bestimmung von Φ und Ψ bei vorgegebenen Spannungen und Verschiebungen

Abschließend sollen noch einige Möglichkeiten diskutiert werden, wie sich die in den Funktionen Φ, Ψ auftretenden willkürlichen Konstanten fixieren lassen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird davon ausgegangen, dass der Koordinatenursprung innerhalb des betrachteten Körpers liegt. Nach (4.13) und (4.14) lassen sich die Konstanten ξ, ξ', δ bei *vorgegebenen Spannungen* durch

$$\Phi(\mathbf{0}) = 0, \quad \text{Vec}[\partial_0 \Phi(\mathbf{x})] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_0 \Psi(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 0 \quad (4.15)$$

festlegen. Durch die erste Gleichung wird ξ , durch die zweite ξ' und durch die dritte Gleichung δ bestimmt. Damit legen die Bedingungen (4.15) die Funktionen Φ und Ψ eindeutig fest, wodurch keine weiteren Wahlmöglichkeiten existieren.

Im Vergleich dazu ist es bei *vorgegebenen Verschiebungen* ausreichend, die Konstante ξ' und eine der Konstanten ξ, δ festzulegen. Dies lässt sich entweder durch die Bedingung

$$\Phi(\mathbf{0}) = 0, \text{Vec}[\partial_0 \Phi(\mathbf{x})] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 0 \quad \text{oder} \quad \partial_0 \Psi(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 0, \text{Vec}[\partial_0 \Phi(\mathbf{x})] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 0$$

erreichen, was in beiden Fällen zur eindeutigen Bestimmung der Funktionen Φ und Ψ führt.

4.3 Zusammenfassung

Ziel dieses Kapitels war die explizite Konstruktion einer polynomialen Basis im Raum der quadratisch integrierbaren Lösungen der homogenen Lamé-Gleichung, wobei im Speziellen die aus den verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln resultierende Lösungsstruktur zu berücksichtigen war. Für die Beschreibung der monogenen Funktionen Φ und Ψ wurden \mathbb{R} -lineare Ansatzsysteme verwendet, da diese dem Raum eine feinere Struktur aufprägen und somit die Berechnungen relativ überschaubar bleiben. Dieses Vorgehen führte letztendlich zum gewünschten Resultat,

wodurch eine Lamé-Basis mit Hilfe der in dieser Arbeit diskutierten, homogenen \mathbb{H} -holomorphen Polynome explizit angegeben werden konnte. Durch die besonderen strukturellen Eigenschaften der verwendeten Ansatzsysteme ließ sich für die Funktionen Φ und Ψ eine generelle Charakterisierung ableiten, was eine praktische Evaluierung beliebiger monogener Funktionensysteme, die als Ansatzsystem für die verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln verwendet werden sollen, stark vereinfacht. Methodisch gesehen ließe sich dies beispielsweise über eine Bergman-Kernfunktion bezüglich der monogenen Konstanten der jeweiligen Räume \mathbb{H} bzw. \mathcal{A} realisieren, was mit den angegebenen Basissystemen prinzipiell möglich sein sollte, da aufgrund des L^2 -Zerlegungssatzes die monogenen Konstanten eine Orthonormalbasis des unendlich dimensionalen Teilraumes $\ker \partial_0 \cap \ker \bar{\partial}$ bilden. Dabei werden genau diejenigen Anteile des zu untersuchenden Systems von der jeweiligen Kernfunktion reproduziert, welche zu den monogenen Konstanten korrespondieren. Diese können dann entweder aus der Menge der Ansatzfunktionen entfernt werden oder aber in Form von Nebenbedingungen in die Lösung des Randwertproblems integriert werden.

Schließlich wurden die monogenen Funktionen Φ und Ψ hinsichtlich ihres Unbestimmtheitsgrades untersucht. Hierbei ließen sich exakte Beziehungen für den Kern der Spannungsgleichungen angeben und Möglichkeiten zur eindeutigen Bestimmung von Φ und Ψ bei vorgegebenen Spannungen bzw. Verschiebungen aufzeigen. Abgesehen von der Raumdimension sind die hierbei erhaltenen räumlichen Beziehungen den komplexen Beziehungen strukturell erneut sehr ähnlich, was eine formale Übertragung der komplexen Methodik auf den hyperkomplexen Fall auf intuitivem Weg ermöglicht.

Kapitel 5

Numerische Beispiele und weitere Anwendungen

„Man kann beim Studium der Wahrheit drei Hauptziele haben: einmal, sie zu entdecken, wenn man sie sucht; dann: sie zu beweisen, wenn man sie besitzt; und zum letzten: sie vom Falschen zu unterscheiden, wenn man sie prüft.“

Blaise Pascal

Gegenstand dieses abschließenden Kapitels sind einige einführende Beispiele, anhand derer die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren und Ansatzsysteme angewendet und evaluiert werden sollen. Ein wesentlicher Teil beschäftigt sich dabei mit der Lösung von Randwertproblemen auf der Grundlage der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln. Bekannte Lösungsdarstellungen der Lamé-Gleichung werden verwendet, um die entwickelte Lamé-Basis hinsichtlich ihrer Approximationseigenschaften und der numerischen Stabilität zu untersuchen und qualitativ bewerten zu können. Die Evaluierung beschränkt sich dabei jedoch auf die Lösung von Randwertproblemen im Gebiet der Einheitskugel, da die theoretischen Grundlagen für die Konstruktion der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln¹ sowie für die polynomiale Lamé-Basis² nur für das Innengebiet ausführlich bewiesen wurden. Im Zuge dessen werden außerdem einige weiterführende Verfahren, die im Verlauf der Arbeit zunächst als Ausblick formuliert wurden, in ihrer prinzipiellen Ansatzidee erläutert und anhand eines konkreten Anwendungsbeispiels exemplarisch demonstriert. Auf einen exakten Beweis wird dabei jedoch verzichtet.

¹Satz von Goursat

²Ansatzsysteme für Φ, Ψ auf der Grundlage der \mathbb{R} -linearen Orthonormalbasis, L^2 -Zerlegungssatz

Neben den Betrachtungen zu den verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Ansätzen werden ferner einige weitere Anwendungsbereiche der in dieser Arbeit konstruierten monogenen Potenz- und Laurentreihenentwicklungen diskutiert, welche die besonderen strukturellen Eigenschaften der Basissysteme und das daraus resultierende Anwendungspotential im Hinblick auf klassische Problemstellungen der räumlichen Funktionentheorie verdeutlichen sollen.

5.1 Approximation der Kelvin-Lösung

In diesem ersten Beispiel sollen die Approximationseigenschaften der Lamé-Basis³ studiert werden. Gegenstand der folgenden Betrachtungen sei die so genannte *Kelvin-Lösung*

$$\mathcal{U}_{\text{Kelvin}}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{(4\alpha - 1) \mathbf{F}}{16\pi G\alpha |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|} + \frac{(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}{16\pi G\alpha |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^3}, \quad (5.1)$$

mit $\mathbf{F} = F_x + \mathbf{e}_1 F_y + \mathbf{e}_2 F_z$ und $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{x} + \mathbf{e}_1 \tilde{y} + \mathbf{e}_2 \tilde{z}$, welche die bekannte Fundamentallösung für eine im Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ des unendlich ausgedehnten elastischen Körpers angreifende Einzelkraft \mathbf{F} beschreibt. Die Gleichung (5.1) ist ferner von Bedeutung, da sich durch diese auch Lösungen für Kraftgruppen und für verteilte Kräfte superponieren lassen. Im Weiteren erkennt man, dass die Verschiebungen an der Kraftangriffstelle $\tilde{\mathbf{x}}$ eine Singularität der Ordnung $\frac{1}{r}$ besitzen, wobei $r = |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|$. Im Vergleich zur Fundamentallösung einer Einzelkraft in der unendlich ausgedehnten elastischen Ebene⁴ kommt es also im dreidimensionalen Fall zu einem schnelleren Abklingen der Verschiebungen.

5.1.1 Evaluierung der Konvergenzeigenschaften

Anhand der Kelvin-Lösung soll die Lamé-Basis zunächst qualitativ hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften bei der Lösung von Randwertproblemen untersucht werden. Dazu wird das Gebiet der Einheitskugel $\mathbb{B}_3 := \mathbb{B}_3(0, 1\text{m})$ betrachtet und die beste Approximation der durch die Kelvin-Lösung vorgegebenen Randverschiebungsdaten auf S^2 bestimmt. Durch die Variation des Angriffspunktes $\tilde{\mathbf{x}} \in \{1.1\text{m}, 1.5\text{m}, 2.0\text{m}, 5.0\text{m}, 10.0\text{m}\}$ der Einzelkraft \mathbf{F} und damit des Abstandes der Singularität vom betrachteten Gebiet wird eine lokale Schwankung der Randverschiebungen simuliert und deren Auswirkung auf die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens untersucht. Im Hinblick auf die Approximation von Lösungen im Nahfeld geometrischer

³q.v. Theorem 4.3

⁴Singularität der Ordnung $\ln r$ am Kraftangriffspunkt

Singularitäten lässt sich mit Hilfe dieser theoretisch einfachen Randwertaufgabe ein hoher Anwendungsbezug herstellen, da hierbei eine rationale Funktion speziell durch eine polynomiale Basis approximiert wird. Die Abbildung 5.1 fasst die für die Berechnung gewählten Geometrie- und Materialparameter zusammen.

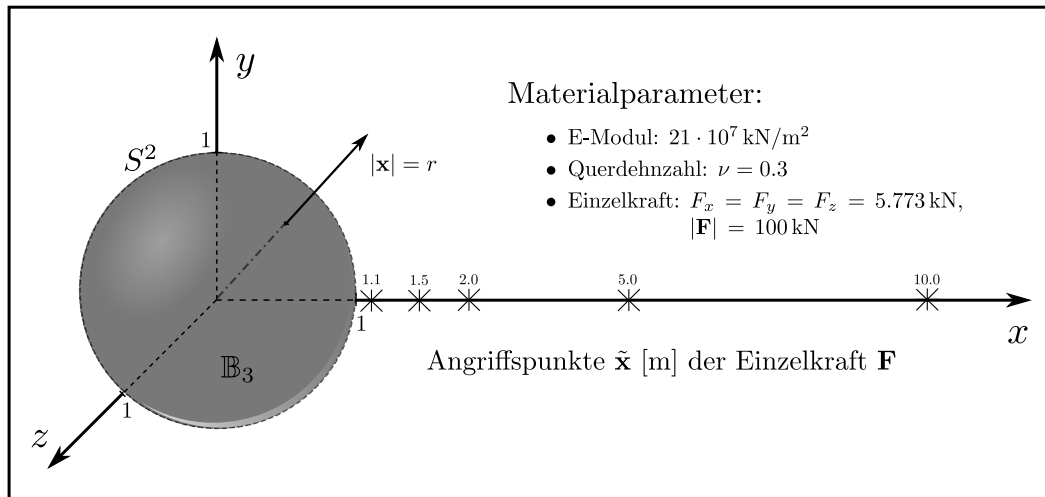


Abbildung 5.1: Geometrie- und Materialparameter für die Approximation der Kelvin-Lösung.

Zur Implementierung der Beispielrechnung wird das Computer-Algebra-System MAPLE[®] in der Version 9 verwendet. Diese Entscheidung lässt sich vor allem dadurch begründen, dass MAPLE[®] eine rein symbolische Beschreibung und Auswertung der Berechnung ermöglicht, wodurch die in dieser Arbeit entwickelten Ansätze und Verfahren, welche ausnahmslos in expliziter Form vorliegen, quasi eins zu eins in den entsprechenden Programmcode umgesetzt werden können. Rundungsfehler und numerische Instabilitäten des Verfahrens werden daher vollständig vermieden. Für praktische Belange ist dieses Vorgehen jedoch eher ungeeignet, da die symbolische Berechnung der Lösung mit einem größeren Speicher- und Rechenzeitbedarf einhergeht. Das Hauptaugenmerk dieser Beispielrechnung soll vorerst aber auf der qualitativen Beurteilung des reinen Approximationsfehlers sowie der Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens liegen, wodurch der zeitliche Aspekt der Berechnung als zweitrangig eingestuft wird. Ein weiterer wesentlicher Grund für die Verwendung von MAPLE[®] liegt in der Nutzung des MAPLE[®]-Programmmoduls *QuatPackage*, welches durch den Autor in Zusammenarbeit mit K. GÜRLEBECK und P. MILDE entwickelt und als integraler Bestandteil des Lehrbuches [Gürlebeck et al. 2006] be-

reits publiziert wurde. Dieses Softwarepaket erweitert die Grundfunktionalitäten des Programmsystems MAPLE[®] um spezielle Berechnungsfunktionalitäten für die Algebra reeller Quaternionen und beinhaltet eine umfassende Polynomdatenbank, welche dem Anwender über vordefinierte Schnittstellen zur Verfügung steht. Alle in dieser Arbeit entstandenen Ansätze und Verfahren wurden ebenfalls in diese Softwareumgebung eingebunden und in Form eines Zusatzmoduls prototypisch implementiert.

Für die qualitative Beurteilung der Approximationseigenschaften der Lamé-Basis wird nun der relative Fehler zwischen der durch die Kelvin-Lösung vorgegebenen Randverschiebungsfunktion $\mathcal{U}_{Kelvin}(\omega)$ und der approximierten Randverschiebungsfunktion $\mathcal{U}_n(\omega)$ bezüglich der L^2 -Norm bestimmt. Dies ist zulässig, da einerseits die verwendeten Funktionensysteme jeweils vollständig in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{R}) \cap \ker \bar{\partial}$ bzw. $L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}) \cap \ker \bar{\partial}$ sind und damit aus der Konvergenz der Reihenentwicklungen für Φ, Ψ auch die Konvergenz der Lamé-Lösung folgt. Andererseits gilt für die Lamé-Lösung ein abgeschwächtes Maximumprinzip, wonach die Qualität der Lösung für die gesuchte Verschiebungsgleichung im betrachteten Gebiet im Wesentlichen von der Approximationsgüte der vorgegebenen Randverschiebungsfunktion abhängt. Das notwendige und hinreichende Konvergenzkriterium lautet damit

$$\frac{\|\mathcal{U}_{Kelvin}(\omega) - \mathcal{U}_n(\omega)\|_{L^2(S^2)}}{\|\mathcal{U}_{Kelvin}(\omega)\|_{L^2(S^2)}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (5.2)$$

wobei n den höchsten Grad der zur Approximation von $\mathcal{U}_n(\omega)$ verwendeten Ansatzfunktionen bezeichnet. Die tatsächliche Anzahl der verwendeten Lamé-Polynome ist

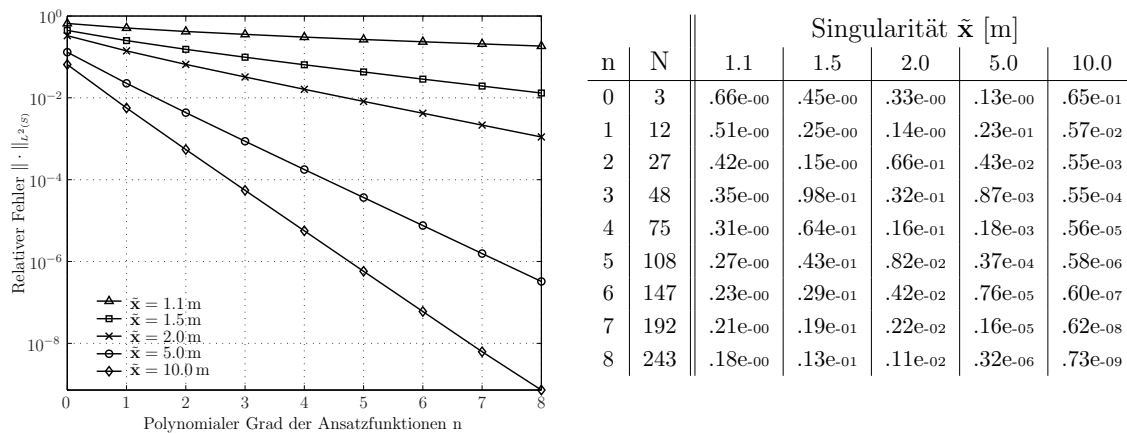


Abbildung 5.2: Relativer L^2 -Fehler bei der Approximation der Kelvin-Lösung.

durch die Beziehung $N = \sum_{s=0}^n (6n + 3) = 3(n + 1)^2$ gegeben. Der bei der Approximation der Kelvin-Lösung erhaltene relative L^2 -Fehler wurde für die gewählten

Geometrieparameter⁵ in Abbildung 5.2 zusammengefasst. Wie zu erkennen ist, konvergiert das Verfahren für alle gewählten Kraftangriffspunkte $\tilde{\mathbf{x}}$ gleichmäßig und mit exponentieller Konvergenzordnung, was aufgrund der Glattheit der vorgegebenen Randverschiebungsfunktion $\mathcal{U}_{\text{Kelvin}} \in C^\infty(\Omega; \mathbb{H})$ und des verwendeten Konvergenzkriteriums (5.2) auch so zu erwarten war. Ferner lässt sich feststellen, dass die lokale Schwankung der Randfunktion, die in ihrer Intensität durch die jeweilige Entfernung der Singularität vom Rand des Gebietes variiert, einen konstanten aber direkten Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit besitzt. Für kleine Schwankungen in der Randverschiebungsfunktion $\tilde{\mathbf{x}} \geq 5$ erhält man bereits für sehr niedrige Ansatzgrade $n \leq 2$ einen relativen L^2 -Fehler kleiner als 1%. Bei großen Schwankungen in den Randdaten $\tilde{\mathbf{x}} \leq 2$ hingegen beträgt der relative L^2 -Fehler für den Approximationsgrad $n = 8$ im ungünstigsten Fall noch 18%. Eine signifikante Verbesserung dieser Konvergenzeigenschaften ließe sich mit Hilfe von Laurentreihenansätzen erzielen, da durch die äußeren monogenen Funktionen eine genauere Anpassung der Lösung an die Ordnung und damit an das Nahfeld der Singularität erhalten wird.

5.1.2 Evaluierung der Stabilitätseigenschaften

Neben den Konvergenzeigenschaften ist im Hinblick auf eine praxisorientierte Umsetzung des Verfahrens unter Verwendung höherer Programmiersprachen⁶ die numerische Stabilität von entscheidender Bedeutung. Um diese zu beurteilen, wird durch eine Eigenwertanalyse die Konditionszahl der Gramschen Matrix des Berechnungsbeipfels bestimmt. Die Konditionszahl einer Matrix ist dabei als Quotient des größten und kleinsten Eigenwertes der Matrix definiert. In diesem Zusammenhang sei noch einmal darauf hingewiesen, dass alle mit MAPLE[®] erhaltenen Berechnungsergebnisse exakt vorliegen und damit numerische Effekte, die bereits bei der Eigenwertanalyse zur Verfälschung der Ergebnisse führen könnten, ausgeschlossen werden. Weiterhin sei bemerkt, dass die zur Approximation der Funktionen Φ und Ψ verwendeten Ansatzsysteme zwar Orthonormalsysteme sind - das resultierende Lamé-System im Allgemeinen jedoch nicht. Um daher die Qualität der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Lamé-Basis zu bewerten, werden zum Vergleich noch andere Ansatzsysteme \mathbb{H} -holomorpher Polynome zur Approximation der Potentialfunktionen Φ und Ψ verwendet und hinsichtlich ihrer numerischen Stabilität untersucht.

⁵q.v. Abbildung 5.1

⁶e.g. C++, Java, etc.

Folgende Ansatzsysteme werden außerdem betrachtet:

System II: Orthonormalbasis nach [Cação et al. 2004]

Im Unterschied zur Lamé-Basis nach Theorem 4.3 wird bei diesem Ansatzsystem für die Approximation der Funktion Φ die Orthonormalbasis nach [Cação et al. 2004] verwendet. Für die hier benötigten strukturellen Eigenschaften bedeutet dies im Wesentlichen, dass zum einen die Teilmenge der monogenen Konstanten nicht explizit separiert werden kann und dass zum anderen die hyperkomplexe Ableitung der Fourierreihe nicht erneut auf eine Orthogonalreihe führt. Um daher eine Lamé-Basis mit diesem Orthogonalsystem zu erhalten, werden für jeden Ansatzgrad n die monogenen Konstanten sowie die nach der ersten Ableitung linear abhängigen Ansatzfunktionen zu Null gesetzt. Der Ansatz für die Funktion Ψ bleibt gegenüber System I unverändert.

System III: Basis monogener Kugelfunktionen

Für das dritte Ansatzsystem werden sowohl für die Approximation der Funktion Φ als auch der Funktion Ψ nur vollständige und im Allgemeinen nicht orthonormierte Systeme monogener Kugelfunktionen verwendet. Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ wird die Funktion Φ durch das in Bezug auf (3.36) reduzierte Ansatzsystem

$$\left\{ X_{n,0}^{0,\dagger}, X_{n,0}^{m,\dagger}, Y_{n,0}^{m,\dagger}, X_{n,3}^{0,\dagger}, X_{n,3}^{l,\dagger}, Y_{n,3}^{l,\dagger} \right\}_{m=1,\dots,n, l=1,\dots,n-1}$$

und die Funktion Ψ durch das Ansatzsystem

$$\left\{ X_{n,0}^{0,\dagger}, X_{n,0}^{m,\dagger}, Y_{n,0}^{m,\dagger} \right\}_{m=1,\dots,n}$$

approximiert. Anhand des Ranges der Gramschen Matrix und der bekannten Raumdimension polynomialer Lamé-Lösungen konnte für die betrachteten Approximationsgrade ($n \leq 8$) rechnerisch gezeigt werden, dass die gewählten Ansatzfunktionen eine Basis bilden.

System IV: Basis verallgemeinerter Potenzen

Als viertes Ansatzsystem wird die Basis der verallgemeinerten Potenzen⁷ betrachtet. Anhand dieser Basis soll vor allem beispielhaft gezeigt werden, wie sich das Orthonormalsystem (3.45) und seine strukturellen Eigenschaften nutzen lassen, um aus einer beliebigen polynomialen Basis in $L^2(\Omega; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ eine polynomiale Lamé-

⁷q.v. Theorem 3.1 und Theorem 3.2

Basis zu erhalten. Das prinzipielle Vorgehen wurde bereits im Ausblick des vorangegangenen Kapitels erläutert und soll hier nur kurz zusammengefasst werden. Den Ausgangspunkt der Konstruktion bildet ein vollständiger Reihenansatz für die Funktionen Φ und Ψ in der gegebenen Basis der verallgemeinerten Potenzen. Allgemein lautet dieser für eine beliebige Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \bar{z}^{\nu} \alpha_{\nu}, \text{ mit } \alpha_{\nu} = \sum_{s=0}^3 \alpha_{\nu}^s \mathbf{e}_s \text{ und } \nu = (n-j, j). \quad (5.3)$$

Nun sei an die im Kapitel 4.1 erhaltene Charakterisierung der Potentialfunktionen erinnert, wonach

$$\Phi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial}) \text{ und } \Psi \in (L^2(\mathbb{B}_3; \mathcal{A}) \cap \ker \bar{\partial}) \perp (\ker \partial \cap \ker \bar{\partial}).$$

Beide Funktionen sind demnach orthogonal zum unendlich dimensionalen Teilraum der monogenen Konstanten, für den nach Theorem 3.11 die Elemente $\{\varphi_{n, \mathbb{H}}^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis bilden. Demzufolge ist der Anteil der monogenen Konstanten in der Reihendarstellung (5.3) durch eine Orthoprojektion auf diesen Teilraum zu bestimmen. Um dies zu realisieren, soll für die Teilmenge der monogenen Konstanten $(\ker \partial \cap \ker \bar{\partial}) \subset (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial})$ die *Bergman-Kernfunktion* konstruiert werden. Zur Vereinfachung sei zunächst $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\zeta} = x_1 - x_2 \mathbf{e}_3$ und $\boldsymbol{\eta} = y_1 - y_2 \mathbf{e}_3$. Mit (3.45) und der Beziehung (3.58) ergibt sich der gesuchte Bergman-Kern explizit zu

$$K(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n, \mathbb{H}}^n(\boldsymbol{\zeta}) \overline{\varphi_{n, \mathbb{H}}^n(\boldsymbol{\eta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)(2n+1)!}{\pi 2^{2n+2} (n!)^2} (\boldsymbol{\zeta} \bar{\boldsymbol{\eta}})^n.$$

Die Orthoprojektion der Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ auf den Teilraum der monogenen Konstanten $(\ker \partial \cap \ker \bar{\partial}) \subset (L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial})$ ist dann durch das innere Produkt des Bergman-Kerns und der Funktion f gegeben. Die Bedingung für die Fixierung des Anteils der monogenen Konstanten in (5.3) lautet somit

$$0 = \langle K(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}), f(\mathbf{x}) \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = \int_{\mathbb{B}_3} \overline{K(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})} f(\mathbf{x}) dV,$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich die Beziehungen in der linken Spalte von Abbildung 5.3 ergeben. Wie bereits im vorangegangenen Kapitel angedeutet wurde, lässt sich der Teilraum der monogenen Konstanten bezüglich der Basis der symmetrischen Potenzen nicht explizit in Form von einzelnen Basiselementen separieren, sondern liegt vielmehr als spezielle Linearkombination aller Basiselemente vor.

Schließlich sind noch die Nebenbedingungen aufzustellen, damit die Funktion Ψ auf die Untermenge \mathcal{A} abbildet, was also bedeutet, dass für eine beliebige Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ gelten muss: $0 = [f]_3$ und $0 = \bar{\partial}f$. Diese Bedingungen lassen sich unter Verwendung des Reihenansatzes (5.3) explizit auflösen, wonach ein Koeffizientenvergleich die in der rechten Spalte der Abbildung 5.3 angegebenen Nebenbedingungen liefert. Dieses Resultat findet sich in einem anderen Zusammenhang bereits in [Cruz et al. 2006].

Damit sind nun alle Nebenbedingungen für die Konstruktion einer Lamé-Basis auf der Grundlage der verallgemeinerten Potenzen bekannt. Methodisch gesehen

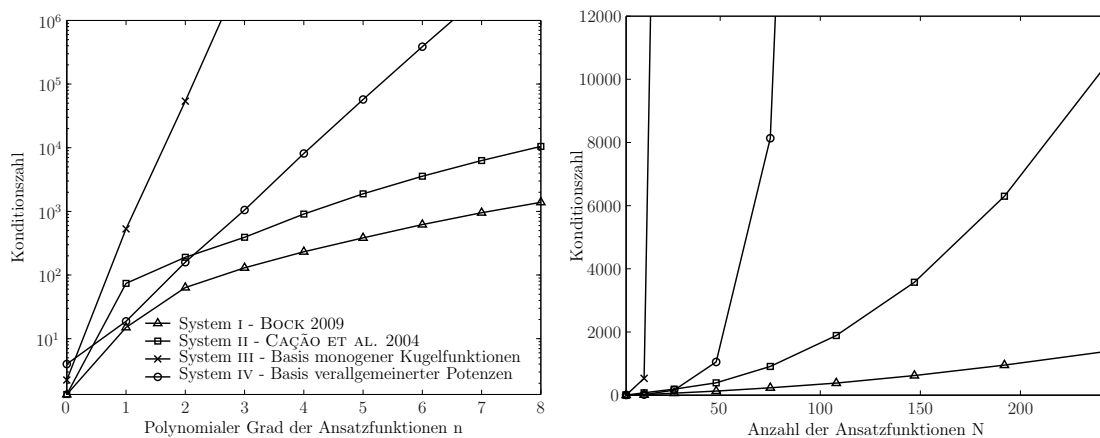
	\vec{z}^ν	α_ν^0	α_ν^1	α_ν^2	α_ν^3	Bedingungen	α_ν^0	α_ν^1	α_ν^2	α_ν^3	Bedingungen
0	$\vec{z}^{(0,0)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(0,0)}^0 = \alpha_{(0,0)}^1 = \alpha_{(0,0)}^2 = \alpha_{(0,0)}^3 = 0$				●	$\alpha_{(0,0)}^3 = 0$
1	$\vec{z}^{(1,0)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(1,0)}^0 - \alpha_{(0,1)}^3 = 0, \alpha_{(1,0)}^1 - \alpha_{(0,1)}^2 = 0$			●	●	$\alpha_{(1,0)}^2 - \alpha_{(0,1)}^1 = 0$
	$\vec{z}^{(0,1)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(1,0)}^2 + \alpha_{(0,1)}^1 = 0, \alpha_{(1,0)}^3 + \alpha_{(0,1)}^0 = 0$	●			●	$\alpha_{(1,0)}^3 = \alpha_{(0,1)}^3 = 0$
2	$\vec{z}^{(2,0)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(2,0)}^0 - \alpha_{(1,1)}^3 - \alpha_{(0,2)}^0 = 0$			●	●	$2\alpha_{(2,0)}^2 - \alpha_{(1,1)}^1 = 0$
	$\vec{z}^{(1,1)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(2,0)}^1 - \alpha_{(1,1)}^2 - \alpha_{(0,2)}^1 = 0$	●	●	●	●	$\alpha_{(1,1)}^2 - 2\alpha_{(0,2)}^1 = 0$
	$\vec{z}^{(0,2)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(2,0)}^2 + \alpha_{(1,1)}^1 - \alpha_{(0,2)}^2 = 0$ $\alpha_{(2,0)}^3 + \alpha_{(1,1)}^0 - \alpha_{(0,2)}^3 = 0$	●		●	●	$\alpha_{(2,0)}^3 = \alpha_{(1,1)}^3 = \alpha_{(0,2)}^3 = 0$
3	$\vec{z}^{(3,0)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(3,0)}^0 - \alpha_{(2,1)}^3 - \alpha_{(1,2)}^0 + \alpha_{(0,3)}^3 = 0$			●	●	$3\alpha_{(3,0)}^2 - \alpha_{(2,1)}^1 = 0$
	$\vec{z}^{(2,1)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(3,0)}^1 - \alpha_{(2,1)}^2 - \alpha_{(1,2)}^1 + \alpha_{(0,3)}^2 = 0$	●	●	●	●	$2\alpha_{(2,1)}^2 - 2\alpha_{(1,2)}^1 = 0$
	$\vec{z}^{(1,2)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(3,0)}^2 + \alpha_{(2,1)}^1 - \alpha_{(1,2)}^2 - \alpha_{(0,3)}^1 = 0$	●	●	●	●	$\alpha_{(1,2)}^2 - 3\alpha_{(0,3)}^1 = 0$
	$\vec{z}^{(0,3)}$	●	●	●	●	$\alpha_{(3,0)}^3 + \alpha_{(2,1)}^0 - \alpha_{(1,2)}^3 - \alpha_{(0,3)}^0 = 0$	●		●	●	$\alpha_{(3,0)}^3 = \alpha_{(2,1)}^3 = \alpha_{(1,2)}^3 = \alpha_{(0,3)}^3 = 0$
n	$\vec{z}^{(n,0)}$	Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ lauten die Bedingungen zum Fixieren der monogenen Konstanten					Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ lauten die Bedingungen damit die Potenzreihe auf \mathcal{A} abbildet				
	\vdots	$0 = \sum_{s=0}^n \mathbf{e}_3^s \alpha_{(n-s,s)}$					$0 = (n-s) \alpha_{(n-s,s)}^2 - (s+1) \alpha_{(n-s-1,s+1)}^1,$				
	$\vec{z}^{(0,n)}$	mit $\alpha_\nu = \alpha_\nu^0 + \alpha_\nu^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_\nu^2 \mathbf{e}_2 + \alpha_\nu^3 \mathbf{e}_3$.					$0 = \alpha_{(n-t,t)}^3,$ mit $s = 0, \dots, n-1$ und $t = 0, \dots, n$.				

Abbildung 5.3: Nebenbedingungen für die Konstruktion einer Lamé-Basis auf der Grundlage der verallgemeinerten Potenzen.

können diese nun entweder zusätzlich in das jeweilige Gleichungssystem zur Lösung der Randwertaufgabe aufgenommen oder aber bereits in die Reihenansätze für Φ und Ψ integriert werden. Um die Dimension der Gramschen Matrix und die Art der Matrixeinträge mit den anderen Ansatzsystemen vergleichbar zu halten, wird im Rahmen dieses Berechnungsbeispiels letzteres Vorgehen angewendet.

Die Evaluierung der numerischen Stabilität der Ansatzsysteme I-IV anhand der Konditionszahl der jeweiligen Gramschen Matrix führt auf die in der Tabelle der

Abbildung 5.4 zusammengefassten Ergebnisse. In den Diagrammen der Abbildung 5.4 werden diese Resultate nochmals in halb-logarithmischer Darstellung aufbereitet, wobei die Entwicklung der Konditionszahl einmal in Bezug auf den polynomialen Grad n (q.v. Diagramm auf der linken Seite) und einmal in Bezug auf die tatsächliche Anzahl N der Ansatzfunktionen (q.v. Diagramm auf der rechten Seite) aufgetragen ist. Wie die Ergebnisse zeigen, unterscheiden sich die betrachteten Ansatzsysteme hinsichtlich ihrer numerische Stabilität sehr deutlich voneinander. Die Gramsche Matrix des Systems III ist dabei am schlechtesten konditioniert. Die Konditionszahl besitzt bei diesem System ein ausgeprägt exponentielles Wachstum und erreicht bereits zum Grad $n = 4$ eine Größe von $\approx 7e+06$. Ähnlich verhält es sich bei System IV, dessen Konditionszahl ebenfalls exponentiell, jedoch mit einer geringeren Wachstumsrate ($\approx 3e+06$ für $n = 7$) ansteigt. Aus diesem Grund sind die



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N	3	12	27	48	75	108	147	192	243
System I	1.33	15.03	63.53	129.88	231.64	383.29	619.48	950.79	1386.64
System II	1.33	74.08	190.17	391.25	908.78	1886.67	3573.77	6296.19	10466.80
System III	2.25	531.79	53842.20	6.65e+06	1.12e+09	2.47e+11	6.98e+13	2.46e+16	1.06e+19
System IV	4.00	18.74	159.57	1051.91	8133.47	57262.52	3.87e+05	2.49e+06	1.56e+07

Abbildung 5.4: Konditionszahl der Gramschen Matrix.

Systeme III und IV für eine numerische Umsetzung als sehr ungeeignet einzustufen, da bereits bei einem relativ niedrigen Approximationsgrad erhebliche Stabilitätsprobleme auftreten können. Die Hauptursache hierfür liegt vermutlich in den fehlenden Orthonormalitätseigenschaften der zur Approximation von Φ und Ψ verwendeten polynomialen Basissysteme, was sich aus praktischer Sicht nur durch ein aufwen-

diges Orthogonalisierungsverfahren⁸ beheben ließe. In Bezug auf System IV könnte ein weiterer Grund für die schlechte Konditionierung der Gramschen Matrix darin liegen, dass die Einarbeitung der Nebenbedingungen (cf. Abbildung 5.3) aufgrund der Vergleichbarkeit der Systeme I-IV bereits in den Reihenansätzen erfolgte. Da sich jedoch eine monogene Konstante der Orthonormalbasis (3.45) vom Grad n nur als Reihe über alle verallgemeinerten Potenzen vom Grad n darstellen lässt, könnte im Prinzip jedes Element der Reihe entfernt werden, um die jeweiligen Freiheitsgrade zu fixieren. Nach Konstruktion der verallgemeinerten Potenzen hat jedoch ein willkürliches Streichen der Basiselemente, wie im Beispiel durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems der Freiheitsgrade vorab geschehen, starke Auswirkungen auf die Symmetrie des Ansatzsystems und damit möglicherweise auch auf die numerische Stabilität des Verfahrens. Im Fall der verallgemeinerten Potenzen sollten daher die Nebenbedingungen entweder als zusätzliche Gleichungen in das globale Gleichungssystem integriert oder aber nach einer bestimmten Strategie, welche die Symmetrieeigenschaften des Ansatzsystems berücksichtigt, in die Reihenansätze eingearbeitet werden. Im Rahmen dieses Beispiels soll darauf jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Betrachtet man im Gegensatz dazu die Systeme I und II auf der Grundlage vollständiger Orthonormalsysteme, so lässt sich zunächst allgemein feststellen, dass die jeweiligen Matrizen weitaus besser konditioniert sind. Im direkten Vergleich der beiden Systeme wird jedoch deutlich, dass auch hier signifikante Unterschiede bestehen. Anhand der Abbildung 5.4 (Diagramm auf der rechten Seite) erkennt man, dass für das System II ein ausgeprägt quadratisches Wachstum der Konditionszahl vorliegt, wo hingegen die Konditionszahl des Systems I nur annähernd linear wächst. Somit wird das Wachstum der Konditionszahl durch die in dieser Arbeit konstruierte Lamé-Basis (System I) gegenüber System II um nahezu eine Wachstumsordnung verringert, was die numerische Stabilität der Ansätze wesentlich verbessert.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass für die numerische Stabilität neben den Orthogonalitätseigenschaften der zur Approximation der Potentialfunktionen Φ und Ψ verwendeten Ansatzsysteme ferner die strukturellen Eigenschaften dieser Systeme von Bedeutung sind. Für System I lassen sich die strukturellen Vorteile gegenüber System II auf der Grundlage der Orthonormalbasis nach [Cação et al. 2004] im Wesentlichen auf die Orthogonalitätseigenschaften bezüglich der hyper-

⁸e.g. Gram-Schmidt-Verfahren, Cholesky-Verfahren, etc.

komplexen Ableitung der Ansatzfunktionen und auf die eindeutige Separierbarkeit der monogenen Konstanten zurückführen.

5.2 Faktorisierung des Laplace-Operators

Harmonische Funktionen spielen eine bedeutende Rolle bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik⁹. Im Kapitel 2.2.3 wurde bereits auf den Zusammenhang zwischen \mathbb{H} -holomorphen und harmonischen Funktionen hingewiesen. Bekanntlich lässt sich jede Lösung $f \in C^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H})$ der Potentialgleichung $\Delta f = 0$ über die Faktorisierung des Laplace-Operators $\Delta = 4\partial_0\bar{\partial}_0$ in einen \mathbb{H} -holomorphen und einen \mathbb{H} -anti-holomorphen Anteil zerlegen. Neben den strukturellen Aussagen einer solchen Zerlegung liegt der praktische Vorteil insbesondere darin, dass die Ordnung der zu lösenden Differentialgleichung reduziert wird. Anstelle einer partiellen Gleichung II. Ordnung sind nun zwei partielle Gleichungen I. Ordnung zu lösen.

Mit den in dieser Arbeit entwickelten Basissystemen und Orthogonalreihenentwicklungen lässt sich die Faktorisierung einer harmonischen Funktion auf konstruktivem Weg sehr einfach realisieren. Dies soll im Folgenden kurz erläutert und an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. Ausgangspunkt der Betrachtungen sei die \mathbb{H} -holomorphe Orthonormalbasis (3.45). Wie sich analog zum Beweis des Theorems 3.8 zeigen lässt, liefert die Transformation der Basiselemente nach Beziehung (2.14) auf direktem Weg eine Orthonormalbasis homogener \mathbb{H} -anti-holomorpher Polynome $\{\widehat{\varphi_{n,\mathbb{H}}^m} : m = 0, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \partial$. Für die Zerlegung des Hilbert-Raumes $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \Delta$ folgt daher, dass das System der \mathbb{H} -holomorphen und \mathbb{H} -anti-holomorphen Polynome

$$\underbrace{\left\{ \varphi_{n,\mathbb{H}}^l : l = 0, \dots, n-1 \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}}_{\textcircled{1}} \cup \underbrace{\left\{ \varphi_{n,\mathbb{H}}^n \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}}_{\textcircled{2}} \cup \underbrace{\left\{ \widehat{\varphi_{n,\mathbb{H}}^m} : m = 0, \dots, n-1 \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}}_{\textcircled{3}}$$

eine Basis in $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \Delta$ bilden. Wie aus der formellen Faktorisierung zu erwarten war und nun auch anhand der neuartigen Orthonormalbasis sichtbar wird, lässt sich der Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}; \mathbb{H}) \cap \ker \Delta$ zunächst symmetrisch in einen \mathbb{H} -holomorphen Anteil ① und in einen \mathbb{H} -anti-holomorphen Anteil ③ zerlegen. Der Anteil ② ist im Kern beider Differentialoperatoren definiert und führt daher in

⁹e.g. Poisson-Gleichung, Helmholtz-Gleichung, etc.

natürlicher Weise auf die Menge der monogenen Konstanten, welche nach Theorem 3.11 eine Orthonormalbasis in diesem Teilraum bilden. Für feste $n \in \mathbb{N}_0$ ergeben sich damit jeweils n \mathbb{H} -holomorphe bzw. \mathbb{H} -anti-holomorphe Polynome sowie eine monogene Konstante und damit erwartungsgemäß $2n + 1$ polynomiale Lösungen¹⁰ der Potentialgleichung.

Praktisch gesehen lässt sich die Faktorisierung mit Hilfe der Orthogonalreihen dann sowohl über einen „lokalen“ Taylorreihenansatz¹¹ als auch über einen „globalen“ Fourierreihenansatz realisieren. Für den letztgenannten Ansatz soll daher noch die numerische Stabilität des Verfahrens beurteilt werden. Für feste $n, p \in \mathbb{N}_0$ seien $\varphi_{n,\mathbb{H}}^l$, $l = 0, \dots, n$ und $\widehat{\varphi_{p,\mathbb{H}}^m}$, $m = 0, \dots, p$ zwei beliebige homogene Polynome der \mathbb{H} -holomorphen bzw. der \mathbb{H} -anti-holomorphen Orthonormalbasis. Für das innere Produkt der Ansatzfunktionen lässt sich zeigen, dass

$$\langle \varphi_{n,\mathbb{H}}^l, \widehat{\varphi_{p,\mathbb{H}}^m} \rangle_{(\mathbb{B}_3, \mathbb{H})} = \begin{cases} \frac{2l+1}{2n+1} & : n = p \wedge l = m, \\ 0 & : n \neq p \vee l \neq m. \end{cases}$$

Die zugehörige Gramsche Matrix \mathbf{G}_n ist damit nur schwach besetzt, wie Abbildung 5.5 verdeutlicht. Erneut bezeichnet n den maximalen Grad und $N = \sum_{s=0}^n (2s+1) = (n+1)^2$ die tatsächliche Anzahl der verwendeten Ansatzfunktionen. Für \mathbf{G}_n wird

		Eigenwerte			
n	N	λ_{min}	λ_{max}	$\lambda_{max}/\lambda_{min}$	
0	1	1	1	1	
1	4	2/3	4/3	2	
2	9	2/5	8/5	4	
3	16	2/7	12/7	6	
4	25	2/9	16/9	8	
5	36	2/11	20/11	10	
10	121	2/21	40/21	20	
20	441	2/41	80/41	40	
50	2601	2/101	200/101	100	

Abbildung 5.5: Gramsche Matrix und Eigenwertanalyse für die Δ -Faktorisierung.

außerdem für hinreichend große Ansatzgrade n eine Eigenwertanalyse durchgeführt. Die guten Struktureigenschaften der Matrix ermöglichen dabei eine exakte Berechnung der Eigenwerte. Die erhaltenen Ergebnisse für den kleinsten und größten Ei-

¹⁰cf. Kapitel 3.2

¹¹cf. Beispiel 5.1 am Ende dieses Abschnitts

genwert, λ_{min} und λ_{max} , sowie die Konditionszahl $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ sind in der Tabelle der Abbildung 5.5 zusammengefasst. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ lassen sich daraus die allgemeinen Beziehungen

$$\lambda_{min} = \frac{2}{2n+1}, \quad \lambda_{max} = \frac{4n}{2n+1} \quad \text{und damit} \quad \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = 2n$$

ableiten. Mit Bezug auf die tatsächliche Anzahl der Ansatzfunktionen N entwickelt sich die Konditionszahl demzufolge wie $2(\sqrt{N} - 1)$.

Beispiel 5.1. Als abschließendes Beispiel soll die reell harmonische Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - 1|}$$

über einen Taylorreihenansatz faktorisiert werden. Dazu wird zuerst ∂_0 auf die harmonische Ausgangsfunktion angewendet. Die resultierende \mathbb{H} -holomorphe Funktion lässt sich dann im Ursprung in eine monogene Taylorreihe

$$\partial_0 f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2} A_k^0(\mathbf{x})$$

entwickeln. Die erhaltene Reihe besitzt den Konvergenzradius $\rho = 1$ und konvergiert demnach gleichmäßig im Gebiet $|\mathbf{x}| < 1$. Eine Primitivierung der Reihe liefert dann den gesuchten \mathbb{H} -holomorphen Anteil ① der Ausgangsfunktion

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathcal{P}_{\mathbb{H}} \left[\partial_0 f(\mathbf{x}) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} A_{k+1}^0(\mathbf{x}).$$

Der \mathbb{H} -anti-holomorphe Anteil ③ lässt sich auf ähnliche Weise bestimmen. Die dazu notwendigen funktionentheoretischen Werkzeuge (\mathbb{H} -anti-holomorphe Taylorreihe und Primitive) und deren strukturelle Eigenschaften können vollkommen analog zur monogenen Herleitung bewiesen werden. Durch Primitivierung der anti-monogenen Taylorreihenentwicklung von $\bar{\partial}_0 f(\mathbf{x})$ erhält man entsprechend

$$f_3(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{P}}_{\mathbb{H}} \left[\bar{\partial}_0 f(\mathbf{x}) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \widehat{A_{k+1}^0}(\mathbf{x}).$$

Letztendlich bleibt noch der Anteil ② der monogenen Konstanten zu bestimmen, der sich bei dieser Funktion in einfacher Weise zu $f(\mathbf{0}) = 1$ ergibt. Somit lautet die gesuchte Faktorisierung der Ausgangsfunktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - 1|} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1}^0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{A_{k+1}^0}(\mathbf{x}),$$

welche erwartungsgemäß mit der reellen Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(\mathbf{x})$ im Ursprung identisch ist.

5.3 Charakterisierung des Dirichlet-Raumes

Dieser Abschnitt zeigt eine weitere Anwendung der im Rahmen dieser Arbeit konstruierten Orthogonalreihen, nämlich die Möglichkeit der Charakterisierung von Funktionenräumen. Hier sollen nun im Speziellen einige Eigenschaften \mathbb{H} -holomorpher Funktionen diskutiert werden, welche zum bekannten Dirichlet-Raum gehören. Im Falle komplex-holomorpher Funktionen ist der Dirichlet-Raum \mathcal{D} durch

$$\mathcal{D} = \left\{ f : \mathbb{B}_2 \mapsto \mathbb{C} : \bar{\partial}_z f = 0, \int_{\mathbb{B}_2} |f'(z)|^2 dx dy < \infty \right\}$$

definiert. Bekanntermaßen bildet dieser Funktionenraum die theoretische Grundlage für die Anwendung von Variationsmethoden, wodurch eine Charakterisierung dieses Raumes im Hinblick auf eine Kopplung der hier entwickelten analytischen Verfahren mit numerischen Standardverfahren von besonderem Interesse ist. Aufgrund der Tatsache, dass in der komplexen Funktionentheorie holomorphe Funktionen zumeist über die Koeffizienten ihrer Taylorreihe beschrieben werden, ist es nahe liegend, auch die Funktionen aus \mathcal{D} über das Verhalten ihrer Taylorkoeffizienten zu charakterisieren. Hierzu sei $f \in \mathcal{D}$, welche sich in der Einheitskreisscheibe \mathbb{B}_2 in eine konvergente Taylorreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entwickeln lässt. Dann kann f als Funktion aus \mathcal{D} äquivalent über die zugehörigen Taylorkoeffizienten

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 < \infty \quad (5.4)$$

charakterisiert werden. Diese Strategie soll nun insbesondere unter Verwendung der neuartigen Orthogonalreihenentwicklungen auf den räumlichen Fall übertragen werden. Nach [Gürlebeck et al. 1999] ist eine erste Wahl für die Definition des Dirichlet-Raumes in höheren Dimensionen die Folgende:

$$\mathcal{D} = \left\{ f : \mathbb{B}_3 \mapsto \mathbb{H} : \bar{\partial}_0 f = 0, \int_{\mathbb{B}_3} |\partial_0 f|^2 dV < \infty \right\}.$$

Manchmal werden Dirichlet-Räume vektorwertiger Funktionen auch auf der Grundlage des Gradienten definiert, wie beispielsweise in [Cnops & Delanghe 1999] und [Cnops et al. 2001]. Die zugehörige Halbnorm wird dabei unter Verwendung von $(\int_{\mathbb{B}_3} \sum_{i=0}^3 |\text{grad} f_i|^2 dV)^{1/2}$ konstruiert. Diese Halbnorm ist jedoch für \mathbb{H} -holomorphe Funktionen viel restriktiver als die Halbnorm für den hier definierten Dirichlet-Raum. Auch interagiert diese weder mit den Reihenentwicklungen noch mit den Operatoren der beschreibenden Funktionenklasse.

Anhand der Herleitung der Beziehung (5.4) wird deutlich, warum die verfügbaren Methoden zur Charakterisierung von \mathcal{D} und anderen gewichteten Funktionenräumen (e.g. [Bernstein et al. 2004, Gürlebeck & Malonek 2001]) nicht zufriedenstellend sind. Einerseits ist festzustellen, dass die Taylorreihe auf der Grundlage der verallgemeinerten Potenzen (3.6) keine Orthogonalreihe ist. Zwar lassen sich dadurch generelle Abschätzungen der Taylorkoeffizienten von oben, jedoch nicht von unten gewinnen. Abschätzungen von unten sind dabei nur für spezielle Reihenentwicklungen (q.v. [Gürlebeck & Malonek 2001]) möglich. Diese so genannten *lacunary series* sind dadurch charakterisiert, dass diese größere Lücken in den auftretenden Taylorkoeffizienten besitzen, wodurch für eine Abschätzung nach unten gewisse Orthogonalitätsbeziehungen für spezielle, nicht verschwindende Reihenglieder ausgenutzt werden können. Arbeitet man andererseits mit der Fourierreihe bezüglich der Basis nach [Cação et al. 2004; 2006], so stellt sich das Problem, dass die hyperkomplexe Ableitung der Fourierreihe nicht erneut auf eine Orthogonalreihe führt, wodurch also erneut methodische Schwierigkeiten für die Abschätzung der Reihe entstehen.

Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Potenzreihenentwicklungen ist es nun möglich die genannten Probleme zu umgehen. Sowohl die Taylor- als auch die Fourierreihe besitzen die Eigenschaft einer Orthogonalreihe, deren hyperkomplexe Ableitung erneut auf eine orthogonale Reihe bezüglich des gleichen Ansatzsystems führt. Ferner lassen sich nun auch die Entwicklungskoeffizienten beider Reihen über einen einfachen multiplikativen Ausdruck (3.57) miteinander in Beziehung setzen, wodurch einerseits die innere Produktstruktur des zugrunde liegenden L^2 -Raumes verwendet werden kann und sich andererseits die gesuchten Eigenschaften der Taylorkoeffizienten bestimmen lassen.

Zunächst wird daher die Taylorreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n A_n^l \mathbf{t}_{n,l}, \quad \mathbf{t}_{n,l} = \frac{1}{n!} \bar{\partial}_c^l \partial_0^{n-l} f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

einer Funktion $f \in \mathcal{D}$ betrachtet. Die hyperkomplexe Ableitung der Reihe ergibt sich infolge der Appell-Eigenschaft der Ansatzfunktionen zu

$$\partial_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} n A_{n-1}^l \mathbf{t}_{n,l}.$$

Die Parsevalsche Gleichung führt dann auf die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} n^2 \|A_{n-1}^l\|_{L_2(\mathbb{B}_3)}^2 |\mathbf{t}_{n,l}|^2 < \infty,$$

wonach zur weiteren Auswertung des Ausdrucks die Norm der jeweiligen Appell-Funktionen benötigt wird. Aus den elementweisen Beziehungen (3.58) zwischen der Appell- und der Orthonormalbasis erhält man sofort

$$\|A_n^l\|_{L_2(\mathbb{B}_3)} = 2^{l+1} n! \sqrt{\frac{\pi}{(2n+3)(n-l)!(n+l+1)!}}.$$

Dies führt schließlich auf die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 ((n-1)!)^2 \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{2l+2} \frac{\pi}{(n+l)!(n-l-1)!} |\mathbf{t}_{n,l}|^2 \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n+1} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{2l+2} \frac{\pi}{(n+l)!(n-l-1)!} |\mathbf{t}_{n,l}|^2 < \infty \end{aligned} \quad (5.5)$$

und damit auf die gewünschte notwendige und hinreichende Charakterisierung der Taylorkoeffizienten einer Funktion $f \in \mathcal{D}$. Der Vollständigkeit halber soll abschließend noch untersucht werden, inwiefern sich die erhaltene Darstellung ändert, wenn anstelle der Taylorreihe äquivalent die korrespondierende Fourierreihe verwendet wird. Nach (3.57) ergibt sich zunächst

$$|\mathbf{t}_{n,l}|^2 = \frac{(2n+3)(n-l)!(n+l+1)!}{2^{2l+2} \pi (n!)^2} |\boldsymbol{\alpha}_{n,l}|^2$$

und damit nach Substitution in (5.5) die notwendige und hinreichende Charakterisierung der Fourierkoeffizienten einer Funktion f aus dem Dirichlet-Raum \mathcal{D}

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+1} \sum_{l=0}^{n-1} (n-l)(n+l+1) |\boldsymbol{\alpha}_{n,l}|^2 < \infty.$$

Der letzte Ausdruck kann jedoch noch vereinfacht werden, da nur eine äquivalente Charakterisierung von Funktionen aus \mathcal{D} gesucht wird. Letztendlich erhält man also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} (n-l)(n+l+1) |\boldsymbol{\alpha}_{n,l}|^2 < \infty.$$

Wie sich unschwer erkennen lässt, besitzt diese Charakterisierung eine starke Analogie zur korrespondierenden Charakterisierung im komplexen eindimensionalen Fall (5.4). Dies scheint in gewisser Weise auch der natürlichere Zugang zu sein, da sich die Frage nach der L^2 -Zugehörigkeit der Ableitungen vermutlich einfacher mit Hilfe der Fourierreihe beantworten lässt, als es mit Hilfe der entsprechenden Taylorreihe der Fall wäre. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die im Rahmen dieser Arbeit

konstruierten (orthogonalen) Potenzreihenentwicklungen eine Charakterisierung der Funktionen des Dirichlet-Raumes anhand der jeweiligen Entwicklungskoeffizienten erlauben. Im Ausblick ist daher eine gute theoretische Grundlage für die Charakterisierung anderer gewichteter Funktionenräume mit Hilfe dieser Orthogonalreihen gegeben. Besonders vorteilhaft ist dabei außerdem, dass sich aufgrund der strukturellen Eigenschaften der Ansatzsysteme methodisch gesehen vollkommen analog zum Komplexen vorgehen lässt.

5.4 Monogene Laurentreihenentwicklungen

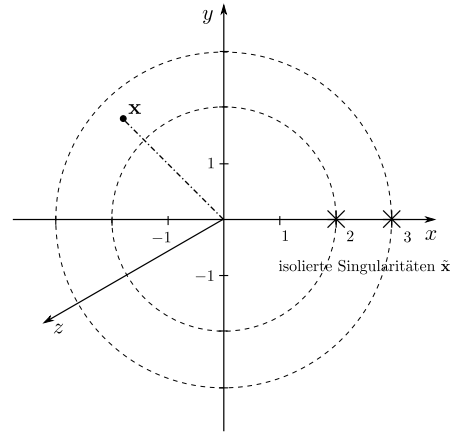
Als abschließendes Beispiel wird die \mathbb{H} -holomorphe Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\mathbf{x} - 3}}{|\mathbf{x} - 3|^3} - \frac{\overline{\mathbf{x} - 2}}{|\mathbf{x} - 2|^3} \quad (5.6)$$

betrachtet, welche jeweils in den Punkten $\mathbf{x} = 2$ und $\mathbf{x} = 3$ eine *isolierte Singularität* besitzt. Analog zum Komplexen wird ein Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ als isolierte Singularität einer Funktion f bezeichnet, wenn diese in einer punktierten Umgebung $\{\mathbf{x} \mid 0 < |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}| < \rho\}$ \mathbb{H} -holomorph, jedoch im Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ selbst nicht erklärt ist. Unter Verwendung der in dieser Arbeit konstruierten Laurentreihe (3.78) sollen nun für die Ausgangsfunktion (5.6) Reihenentwicklungen für die Gebiete $|\mathbf{x}| < 2$, $2 < |\mathbf{x}| < 3$ und $|\mathbf{x}| > 3$ um den Ursprung angegeben und einige Konvergenzeigenschaften gezeigt werden. Die Laurentreihenentwicklungen der einzelnen Summanden von f ergibt zunächst

$$(I) \frac{\overline{\mathbf{x} - 2}}{|\mathbf{x} - 2|^3} = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} A_k^0(\mathbf{x}) & : |\mathbf{x}| < 2, \\ -\sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{k+1}{2^{k+2}} A_k^0(\mathbf{x}) & : |\mathbf{x}| > 2, \end{cases}$$

$$(II) \frac{\overline{\mathbf{x} - 3}}{|\mathbf{x} - 3|^3} = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+2}} A_k^0(\mathbf{x}) & : |\mathbf{x}| < 3, \\ -\sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{k+1}{3^{k+2}} A_k^0(\mathbf{x}) & : |\mathbf{x}| > 3. \end{cases}$$



Zuerst lässt sich feststellen, dass in den Laurentreihenentwicklungen (I) und (II) der einzelnen Summanden von f ausschließlich Funktionen vom Index $l = 0$ auftreten,

was sich darauf zurückführen lässt, dass jeder der beiden Summanden jeweils eine entlang der reellen Achse verschobene (unnormierte) Cauchy-Kernfunktion (2.21) darstellt. Nach Konstruktion lässt sich ferner zeigen, dass die Nebenteile der Reihen, also die Entwicklungen für die Gebiete $|\mathbf{x}| < 2$ und $|\mathbf{x}| < 3$, äquivalent zu den entsprechenden Taylorreihen sind. Der jeweilige Konvergenzradius kann dabei wie auch im Komplexen beispielsweise über das Quotientenkriterium bestimmt werden. Eine einfache Rechnung liefert für die Potenzreihe (I) mit $|\mathbf{x}| < 2$ den erwarteten Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\mathbf{a}_{k+1,0}}{\mathbf{a}_{k,0}} \right|} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{k+2}(k+2)}{2^{k+3}(k+1)} \right|} = 2.$$

Analog ergibt sich für $|\mathbf{x}| < 3$ der Konvergenzradius der Potenzreihe (II) zu $\rho = 3$. Schließlich erhält man durch Kombination der Reihendarstellung für die Teilfunktionen (I) und (II) die gesuchte Laurentreihenentwicklung der Ausgangsfunktion (5.6):

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\mathbf{x} - 3}}{|\mathbf{x} - 3|^3} - \frac{\overline{\mathbf{x} - 2}}{|\mathbf{x} - 2|^3} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2^{k+2}} - \frac{k+1}{3^{k+2}} \right) A_k^0(\mathbf{x}) & : |\mathbf{x}| < 2, \\ \sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{k+1}{2^{k+2}} A_k^0(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+2}} A_k^0(\mathbf{x}) & : 2 < |\mathbf{x}| < 3, \\ \sum_{k=-\infty}^{-2} \left(\frac{k+1}{2^{k+2}} - \frac{k+1}{3^{k+2}} \right) A_k^0(\mathbf{x}) & : |\mathbf{x}| > 3. \end{cases}$$

Ein ähnliches Berechnungsbeispiel findet sich in [Burg et al. 2004] im Kapitel 3 für eine komplex-holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten. Vergleicht man die dort angegebene Laurentreihenentwicklung mit der hier erhaltenen monogenen Laurentreihe, so lässt sich erneut eine deutliche Analogie feststellen. Die Entwicklungskoeffizienten beider Reihendarstellungen unterscheiden sich dabei nur um reelle Faktoren. Somit zeigt auch dieses Beispiel, dass die in dieser Arbeit konstruierte (orthogonale) Laurentreihenentwicklungen unter Berücksichtigung der Nicht-Kommutativität der Algebra und ferner der Dimension der Ansatzsysteme eine formale Übertragung der komplexen Methodik auf den räumlichen Fall ermöglicht.

5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden einige einführende Beispiele und Anwendungen der in dieser Arbeit entwickelten Verfahren und Ansatzsysteme diskutiert. Hierbei zeigte sich sehr deutlich, dass die der Konstruktion zugrunde gelegten strukturellen Eigenschaften der Basissysteme einen wesentlichen Einfluss auf die Qualität der Lösung und ebenso auf die numerische Stabilität der Verfahren besitzen.

Eine für die praktische Anwendung sehr bedeutende Struktureigenschaft ist, dass unter Verwendung der neuartigen Ansatzsysteme der Teilraum der monogenen Konstanten eindeutig separiert werden kann. Wie gezeigt wurde, werden durch diesen Teilraum wichtige physikalische Grundzustände der Systeme beschrieben, wie etwa die Starrkörperbewegungen bei den verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln oder auch Anfangsbedingungen bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von monogenen Potenzreihenansätzen. Außerdem kann die Rolle der Integrationskonstante auf der Grundlage der hier erhaltenen Orthonormalbasis nun eindeutig charakterisiert werden.

Nicht zuletzt zeigten die Beispiele, dass unter gewissen Einschränkungen das formale und methodische Vorgehen bei der Lösung von Randwertaufgaben durch die neuen Systeme eine große Analogie zu den komplexen Ansätzen aufweist und daher die praktische Handhabbarkeit bedeutend vereinfacht wird.

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hatte das Ziel, die Methode der komplexen Spannungsfunktionen auf den räumlichen Fall zu übertragen. Die Motivation hierfür resultierte in erster Linie aus der praktischen Anwendung dieses sehr effizienten analytischen Verfahrens bei der Lösung von Randwertproblemen der ebenen, linearen Bruchmechanik. Diese Aufgabenklasse lässt sich im Wesentlichen dadurch charakterisieren, dass für ein Bauteil oder Tragwerk, deren unverformte Struktur geometrische Defekte und damit Unstetigkeiten in den primären Feldgrößen aufweist, geeignete Schädigungsmodelle entwickelt werden müssen, welche das lokale Materialverhalten im Nahfeld dieser geometrischen Singularitäten hinreichend genau abbilden. Anhand dieser Modelle können dann spezielle Schädigungsparameter, wie etwa Spannungsintensitätsfaktoren oder die Energiefreisetzungsrate, bestimmt werden, welche die auftretende Singularität näher charakterisieren und damit Rückschlüsse auf ein Fortschreiten der Schädigung erlauben. Für die Qualität dieser Kenngrößen ist eine sehr genaue mathematische Beschreibung des Nahfeldes der Störung von Bedeutung. Vor diesem Hintergrund wurde als Kernaufgabe der Arbeit die systematische Verallgemeinerung der aus der ebenen, linearen Elastizitätstheorie bekannten Methode der komplexen Spannungsfunktionen auf den Raum definiert, auf deren Grundlage eine effiziente und sehr genaue Berechnung der genannten Schädigungsparameter ermöglicht werden soll. Der Schwerpunkt lag dabei zunächst auf der Begründung des mathematischen Verfahrens unter besonderer Berücksichtigung der praktischen Anwendbarkeit. Neben der methodischen Verallgemeinerung des Verfahrens war daher auch die Übertragung der sehr effizienten funktionentheoretischen Werkzeuge eine wesentliche Zielsetzung der Arbeit.

Ein erstes funktionentheoretisch sehr bedeutendes Resultat wurde durch die räumliche Verallgemeinerung des Darstellungssatzes von Goursat erhalten (cf. Kapitel 2.3.2), wonach die Lösung einer räumlichen Bipotentialgleichung mit zwei \mathbb{H} -holo-

morphen Funktionen in Beziehung gesetzt wird. Mit Hilfe dieses Darstellungssatzes ließ sich die Methode der komplexen Spannungsfunktionen (cf. Kapitel 2.3.4 und Kapitel 2.3.5) auf den räumlichen Fall übertragen. Im Folgenden wurden auf der Grundlage dieser \mathbb{H} -wertigen Verschiebungs- und Spannungsgleichungen die für die praktische Anwendung des Verfahrens benötigten funktionentheoretischen Methoden untersucht. Hierbei konnte die Arbeit einen wesentlichen Beitrag zur Approximation von monogenen Funktionen durch Potenz- oder Laurentreihenentwicklungen (cf. Kapitel 3.2) liefern. Es ließen sich neuartige Ansatzsysteme konstruieren, welche die komplexen Reihenentwicklungen auf der Grundlage der holomorphen z -Potenzen in allen wesentlichen Eigenschaften verallgemeinern. Folgende Teilresultate sind dabei besonders herauszustellen:

- Die lokale und globale Approximation einer monogenen Funktion konnte über die Entwicklungskoeffizienten beider Orthogonalreihen (Taylor, Fourier) unmittelbar in Beziehung gesetzt werden. Kernpunkt war dabei die Konstruktion einer monogenen Appell-Basis (cf. Kapitel 3.2.9), aus der sich alle benötigten Struktureigenschaften und Beziehungen ableiten ließen.
- Für die Basissysteme wurden sehr kompakte Rekursionsformeln (cf. Kapitel 3.2.10) bewiesen, die eine einfache praktische Handhabung und eine effiziente Implementierung dieser Systeme ermöglichen.
- Es gelang die Definition einer neuartigen (orthogonalen) Laurentreihenentwicklungen für das Kugelschalengebiet (cf. Kapitel 3.2.11), für welche der theoretische Zusammenhang zur Taylorreihe und zur Integralformel von Cauchy hergestellt werden konnte.

Im Hinblick auf die praktische Anwendung des Verfahrens ließ sich unter Verwendung der Potenzreihenansätze eine Lamé-Basis für den Raum der quadratisch integrierbaren Lösungen der Lamé-Gleichung (cf. Kapitel 4.1) explizit angeben, für die außerdem sehr gute numerische Eigenschaften (cf. Kapitel 5.1) gezeigt werden konnten. Ferner ergibt sich im Vergleich zum klassischen Papkovic-Neuber Ansatz eine wesentliche Verbesserung der Lösungsstruktur, da sich die linearen Abhängigkeiten bei einer polynomialen Approximation der allgemeinen Lösungsdarstellung nun unmittelbar in der Teilmenge der monogenen Konstanten wiederfinden lassen. Wie gezeigt wurde (cf. Kapitel 4.2), werden im mechanischen Modell durch diese Strukturen gerade die Starrkörperbewegungen abgebildet, was im Rahmen der Anwendung

eine sehr natürliche Charakterisierung der monogenen Konstanten darstellt. Von praktischer Bedeutung ist dabei, dass diese aufgrund der besonderen Struktur der Ansatzsysteme auch explizit separiert werden können. Aus Anwendersicht zeichnen sich die in dieser Arbeit entwickelten Methoden nicht zuletzt auch dadurch aus, dass alle Resultate explizit erhalten wurden und bis auf wenige Ausnahmen eine große Analogie zu den bekannten Ansätzen der komplexen Funktionentheorie besteht. Die formale Übertragung von komplexen Verfahren und Methodiken auf räumliche Problemstellungen wird dadurch entscheidend unterstützt und wesentlich vereinfacht. Dies wurde anhand einiger einführender Beispiele (cf. Kapitel 5) demonstriert und unter qualitativen Gesichtspunkten evaluiert.

Abschließend werden im Ausblick dieser Arbeit noch einige Aufgaben und Ziele formuliert, welche sich im nächsten Bearbeitungsschritt als logische Konsequenz aus den hier erhaltenen Resultate ergeben würden:

Verallgemeinerung des Verfahrens auf nicht-lineare Problemstellungen.

Im Hinblick auf die möglichen Anwendungsfelder des entwickelten Verfahrens ist außerdem die Behandlung von nicht-linearen Randwertproblemen von Interesse. Hierfür kann die Arbeit [Bondar 2000] als methodische Grundlage bei der Übertragung des Verfahrens verwendet werden. Bei diesem Zugang wird die Lösung des nicht-linearen Problems durch die *Methode der kleinen Parameter* approximiert, indem die Ausgangsaufgabe in eine Reihe linearer Probleme gleichen Typs zerlegt wird und damit der erste Approximationsschritt zu einer gewöhnlichen Randwertaufgabe der linearen Elastizitätstheorie korrespondiert. Die sowohl qualitativen als auch numerischen Vorteile der Methode der komplexen Spannungsfunktionen können somit auch bei der Lösung von nicht-linearen Randwertproblemen effizient eingesetzt werden. In diesem Zusammenhang sind auch andere Zugänge und Anwendungen des ebenen, nicht-linearen Verfahrens, wie etwa [Alexandrovich & Sheina 2006, Alexandrovich & Gorlova 2007, Bogdanova 2007], zu betrachten.

Anwendung des Verfahrens auf räumliche Problemstellungen der linearen Bruchmechanik. Analog zum ebenen Fall sind unter Verwendung der \mathbb{H} -wertigen Kolosov-Muskhelishvili Formeln Lösungsdarstellungen für räumliche Probleme der linearen Bruchmechanik zu konstruieren. Daher ist das Verfahren zunächst an relativ einfachen, bereits bekannten Randwertproble-

men mit Lösungssingularitäten, wie etwa dem Zylinder mit Außenriss oder dem unendlich ausgedehnten, elastischen Körper mit elliptischem Einschluss, zu evaluieren. Dabei soll einerseits untersucht werden, ob zur Lösungsfindung eine Vorgehensweise analog zum Komplexen möglich ist, indem das Nahfeld der Singularität mit Hilfe von Potenz- und Laurentreihenentwicklungen der \mathbb{H} -holomorphen Funktionen hinreichend genau approximiert wird. Andererseits muss geklärt werden, wie sich anhand der Lösungsdarstellung die bruchmechanischen Kenngrößen (Spannungsintensitätsfaktoren, Energiefreisetzungsrate) mit funktionentheoretischen Werkzeugen berechnen lassen. Eine wichtige grundlagentheoretische Aufgabe ist in diesem Zusammenhang die Beschreibung der bekannten Rissöffnungsarten (Modus I, II und III) im Rahmen der hyperkomplexen Theorie, um daraus strukturelle Aussagen für das praktische Rechnen abzuleiten.

Betrachtung monogener Funktionen mit Linien- oder Flächensingularitäten. In der ebenen, linearen Bruchmechanik lässt sich ein Großteil der auftretenden Randwertaufgaben auf Problemstellungen mit Punktsingularitäten zurückführen. In der räumlichen Theorie ist die Klasse der praktisch möglichen Lösungssingularitäten weitaus umfangreicher, wodurch neben Punktsingularitäten (Einzellast auf elastischem Halbraum, Kelvin-Lösung, etc.) auch Linien- oder Flächensingularitäten auftreten können. Daher sind an diese Problemstellung angepasste \mathbb{H} -holomorphe Funktionensysteme zu entwickeln und deren strukturelle Eigenschaften im Kontext der verallgemeinerten Kolosov-Muskhelishvili Formeln zu untersuchen. Ein erster geeigneter Ansatz findet sich in [Gürlebeck & Viet 2008], wo unter Verwendung der verallgemeinerten Potenzen vollständige Systeme von monogenen rationalen Funktionen mit Liniensingularitäten konstruiert wurden.

Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen unter Verwendung monogener Potenzreihenansätze. Aufgrund der strukturellen Eigenschaften der Orthogonalreihen lassen sich diese nun analog zu \mathbb{R} oder \mathbb{C} zur Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen einsetzen. Für den Fall der Laplace-Gleichung (cf. Kapitel 5.2) wurde ein solcher Lösungsansatz bereits exemplarisch diskutiert. Darauf aufbauend sind andere partielle Differentialgleichungen, wie etwa die Poisson-Gleichung oder

die Helmholtz-Gleichung, mit diesen Ansätzen zu studieren. Ferner ist zu untersuchen, inwieweit sich die monogenen Potenzreihen zur Lösung von linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung verwenden lassen und welche praktischen Probleme damit modelliert werden können. Beispielsweise hat die inhomogene, lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung in \mathbb{H} die allgemeine Form

$$[\partial_0^n u(\mathbf{x})] + [\partial_0^{n-1} u(\mathbf{x})] \alpha_{n-1} + \dots + [\partial_0 u(\mathbf{x})] \alpha_1 + u(\mathbf{x}) \alpha_0 = r(\mathbf{x}),$$

wobei $u, r \in L^2(\mathbb{B}_3; \mathbb{H}) \cap \ker \bar{\partial}$ zwei \mathbb{H} -links-holomorphe Funktionen und $\alpha_n = \sum_{j=0}^3 \alpha_n^j \mathbf{e}_j$, $\alpha_n^j \in \mathbb{R}$ quaternionenwertige Koeffizienten bezeichnen. Anhand der neuartigen Potenzreihenentwicklungen lässt sich diese Differentialgleichung methodisch gesehen vollkommen analog zu \mathbb{R} oder \mathbb{C} lösen. Unterschiede bestehen nur in der Art der auftretenden Anfangsbedingungen, welche sich nun als unendliche Reihen der monogenen Konstanten ergeben. Aus theoretischer Sicht sind daher sehr gute Voraussetzungen gegeben, um mit diesen Ansätzen auch (in)homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit variablen Koeffizienten behandeln zu können.

Charakterisierung von gewichteten Funktionenräumen. Wie am Beispiel des Dirichlet-Raumes (cf. Kapitel 5.3) exemplarisch gezeigt wurde, können die in dieser Arbeit entwickelten \mathbb{H} -holomorphen Orthogonalreihen genutzt werden, um spezielle Funktionenräume zu charakterisieren. Aufgrund der besonderen Struktureigenschaften der Ansatzsysteme ist die methodische Vorgehensweise analog zum Komplexen. Daher sind auch andere gewichtete Funktionenräume mit diesen Methoden zu untersuchen, um im Hinblick auf die praktische Anwendung von Variationsverfahren auch Lösungen von Differentialgleichungen mit allgemeineren Singularitäten (e.g. Linien- oder Flächensingularitäten) zu erfassen. Durch die starke Verwandtschaft dieser Räume zum hier betrachteten Dirichlet-Raum sind demzufolge sehr gute Voraussetzungen für die Verallgemeinerung der Methodik gegeben. Der theoretische Zusammenhang und die Unterschiede zu anderen Arbeiten (e.g. [Bernstein et al. 2004, Gürlebeck & Malonek 2001]) sind dabei herauszustellen.

Literaturverzeichnis

- [Abul-Ez & Constaes 2003] ABUL-EZ, M. A. ; CONSTALES, D. L.: On the order of basic series representing Clifford valued functions. In: *Appl. Math. Comput.* 142 (2003), Nr. 2-3, S. 575–584
- [Alexandrovich & Gorlova 2007] ALEXANDROVICH, A. I. ; GORLOVA, A. V.: Study of the plane problem for a physically nonlinear elastic solid by methods of the theory of functions of one complex Variable. In: *Mechanics of Solids* 42 (2007), Nr. 3, S. 382–390
- [Alexandrovich & Sheina 2006] ALEXANDROVICH, A. I. ; SHEINA, A. A.: Plane boundary problems of the nonlinear theory of elasticity Signorini's model derivation by means of complex variable theory. In: *Mechanics of Solids* 18 (2006), Nr. 9, S. 43–53
- [Anderson 1991] ANDERSON, T.: *Fracture mechanics, fundamentals and applications*. CRC Press, 1991
- [Andrews 1998] ANDREWS, L. C.: *Special functions of mathematics for engineers*. SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Oxford University Press, Oxford, 1998
- [Apel et al. 2002] APEL, T. ; SÄNDIG, A.-M. ; SOLOVEV, S. I.: Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes. In: *Math. Model. Numer. Anal.* 36 (2002), Nr. 6, S. 1043–1070
- [Appell 1880] APPELL, P. E.: Sur une class de polynomes. In: *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 9 (1880), S. 119–144

- [Areias & Belytschko 2005] AREIAS, P. M. A. ; BELYTSCHKO, T.: Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), S. 760–788
- [Axler et al. 1992] AXLER, S. ; BOURDON, P. ; RAMEY, W.: *Harmonic function theory*. Springer-Verlag, New York, 1992
- [Basheleishvili 1997] BASHELEISHVILI, M.: Analogues of the Kolosov-Muskhelishvili general representation formulas and Cauchy-Riemann conditions in the theory of elastic mixtures. In: *Georgian Mathematical Journal* 4 (1997), Nr. 3, S. 223–242
- [Basheleishvili 1999a] BASHELEISHVILI, M.: Application of analogues of general Kolosov-Muskhelishvili representations in the theory of elastic mixtures. In: *Georgian Mathematical Journal* 6 (1999), Nr. 1, S. 1–18
- [Basheleishvili 1999b] BASHELEISHVILI, M.: The three-dimensional problem of statics of the elastic mixture theory with displacements given on the boundary. In: *Georgian Mathematical Journal* 6 (1999), Nr. 6, S. 517–524
- [Bauch 1981] BAUCH, H.: *Approximationssätze für die Lösungen der Grundgleichung der Elastostatik*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Dissertation, 1981
- [Belytschko & Black 1999] BELYTSCHKO, T. ; BLACK, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), Nr. 5, S. 6001–6020
- [Bernstein et al. 2004] BERNSTEIN, S. ; K.GÜRLEBECK ; RESENDIS, L. ; TOVAR, L.: $B^{p,q}$ -functions and their harmonic majorants. In: *Trends in Mathematics: Advances in Algebra and Geometry*, Birkhäuser Verlag Basel, 2004, S. 51–63
- [Bogdanova 2007] BOGDANOVA, O. S.: Limiting state of an elastoplastic orthotropic plate with a periodic system of collinear cracks. In: *International Applied Mechanics* 43 (2007), Nr. 5, S. 539–546

- [Bondar 2000] BONDAR, V. D.: Complex-potential method in the nonlinear theory of elasticity. In: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 41 (2000), Nr. 1, S. 120–130
- [Brackx et al. 1982] BRACKX, F. ; DELANGHE, R. ; SOMMEN, F.: *Clifford analysis*. Research Notes in Mathematics 76, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1982
- [Brackx et al. 2002] BRACKX, F. ; DELANGHE, R. ; SOMMEN, F.: On conjugate harmonic functions in Euclidean space. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 25 (2002), S. 1553–1562
- [Broek 1974] BROEK, D.: *Elementary engineering fracture mechanics*. Nordhoff Interantional Publishing, 1974
- [Burg et al. 2004] BURG, K. ; HAF, H. ; WILLE, F.: *Funktionentheorie. Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker*. Wiesbaden: B. G. Teubner Verlag, 2004
- [Cação 2004] CAÇÃO, I.: *Constructive approximation by monogenic polynomials*, Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, Dissertation, 2004
- [Cação & Gürlebeck 2004] CAÇÃO, I. ; GÜRLEBECK, K.: Monogenic primitives of monogenic functions. In: SIMOS, T. (Hrsg.) ; G.PSIHOYIOS (Hrsg.) ; TSITOURAS, C. (Hrsg.): *ICNAAM 2004. International conference on numerical analysis and applied mathematics 2004, Chalkis, Greece, September 10–14, 2004*, Weinheim: Wiley-VCH, 2004, S. 493–498
- [Cação & Gürlebeck 2006] CAÇÃO, I. ; GÜRLEBECK, K.: On monogenic primitives of monogenic functions. In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 52 (2006), Nr. 10–11, S. 1081–1100
- [Cação et al. 2004] CAÇÃO, I. ; GÜRLEBECK, K. ; BOCK, S.: Complete orthonormal systems of spherical monogenics - A constructive approach. In: SON, L. H. (Hrsg.) ; TUTSCHKE, W. (Hrsg.) ; JAIN, S. (Hrsg.): *Methods of Complex and Clifford Analysis (Proceedings of ICAM Hanoi 2004)*. SAS International Publications, 2004

- [Cação et al. 2006] CAÇÃO, I. ; GÜRLEBECK, K. ; BOCK, S.: On derivatives of spherical monogenics. In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 51 (2006), Nr. 8–11, S. 847–869
- [Cação & Malonek 2008] CAÇÃO, I. ; MALONEK, H.: On complete sets of hypercomplex Appell polynomials. In: SIMOS, T. (Hrsg.) ; PSIHOYIOS, G. (Hrsg.) ; TSITOURAS, C. (Hrsg.): *Numerical Analysis and Applied Mathematics* Bd. 1048, American Institute of Physics, 2008, S. 647–650
- [Cação & Malonek 2006] CAÇÃO, I. ; MALONEK, H. R.: Remarks on some properties of monogenic polynomials. In: SIMOS, T. (Hrsg.) ; PSIHOYIOS, G. (Hrsg.) ; TSITOURAS, C. (Hrsg.): *ICNAAM 2006. International conference on numerical analysis and applied mathematics 2006*, Wiley-VCH, Weinheim, 2006, S. 596–599
- [Cnops & Delanghe 1999] CNOPS, J. ; DELANGHE, R.: Möbius invariant spaces in the unit ball. In: *Appl. Anal.* 73 (1999), Nr. 1-2, S. 45–64
- [Cnops et al. 2001] CNOPS, J. ; DELANGHE, R. ; GÜRLEBECK, K. ; SHAPIRO, M.: Q_p -spaces in Clifford analysis. In: *Adv. Appl. Clifford Algebras* 11 (S1) (2001), S. 201–218
- [Cruz et al. 2006] CRUZ, J. F. ; FALCÃO, M. ; MALONEK, H. R.: 3D-mappings and their approximation by series of powers of a small parameter. In: GÜRLEBECK, K. (Hrsg.) ; KÖNKE, C. (Hrsg.): *Proc. of the 17th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, ISSN 1611-4086*, Bauhaus-Universität Weimar, 2006
- [Delanghe 2006] DELANGHE, R.: On primitives of monogenic functions. In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 51 (2006), Nr. 8–11, S. 959–970
- [Dhanasekar et al. 2006] DHANASEKAR, M. ; HAN, J. ; QIN, Q.: A hybrid-Trefftz element containing an elliptic hole. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 42 (2006), S. 1314–1323
- [Eelbode & Sommen 2007] EELBODE, D. ; SOMMEN, F.: Partial primitives for Clifford algebra-valued functions. In: *Advances in Applied Clifford Algebras* 17 (2007), S. 411–424

- [Falcão et al. 2006] FALCÃO, M. ; CRUZ, J. F. ; MALONEK, H. R.: Remarks on the generation of monogenic functions. In: GÜRLEBECK, K. (Hrsg.) ; KÖNKE, C. (Hrsg.): *Proc. of the 17th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, ISSN 1611-4086*, Bauhaus-Universität Weimar, 2006
- [Falcão & Malonek 2007] FALCÃO, M. ; MALONEK, H.: Generalized exponentials through Appell sets in \mathbb{R}^{n+1} and Bessel functions. In: SIMOS, T. (Hrsg.) ; PSIHOYIOS, G. (Hrsg.) ; TSITOURAS, C. (Hrsg.): *Numerical Analysis and Applied Mathematics* Bd. 936, American Institute of Physics, 2007, S. 750–753 (ISBN: 978-0-7354-0447-2)
- [Fueter 1935] FUETER, R.: Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. In: *Comm. Math. Helv.* 7 (1935), S. 307–330
- [Goman 1984] GOMAN, O. G.: On the Kolosov-Muskhelishvili analog for the three-dimensional state of stress. In: *J. Appl. Math. Mech.* 47 (1984), S. 65–69
- [Goursat 1898] GOURSAT, E.: Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$. In: *Bull. Soc. Math. France* 26 (1898), S. 236
- [Griffith 1921] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society London* 221 (1921), S. 163–198
- [Gürlebeck 1993] GÜRLEBECK, K.: Quaternionic analysis and transmission problems. In: BRACKX, F. (Hrsg.) ; DELANGHE, R. (Hrsg.) ; SERRAS, H. (Hrsg.): *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics* Bd. 55, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993, S. 101–108
- [Gürlebeck et al. 2006] GÜRLEBECK, K. ; HABETHA, K. ; SPRÖSSIG, W.: *Funktionentheorie in der Ebene und im Raum*. Birkhäuser Verlag, 2006
- [Gürlebeck et al. 1999] GÜRLEBECK, K. ; KÄHLER, U. ; SHAPIRO, M. ; TOVAR, L.: On Q_p -spaces of quaternion-valued functions. In: *Complex Variables* 39 (1999), S. 115–135

- [Gürlebeck & Malonek 1999] GÜRLEBECK, K. ; MALONEK, H. R.: A hypercomplex derivative of monogenic functions in \mathbb{R}^{n+1} and its applications. In: *Complex Variables* 39 (1999), S. 199–228
- [Gürlebeck & Malonek 2001] GÜRLEBECK, K. ; MALONEK, H. R.: On strict inclusions of Q_p -spaces of quaternion-valued functions. In: *Bull. Austral. Math. Soc.* 64 (2001), S. 33–50
- [Gürlebeck & Morais 2007] GÜRLEBECK, K. ; MORAIS, J.: On the calculation of monogenic primitives. In: *Advances in Applied Clifford Algebras* 17 (2007), Nr. 3, S. 481–496
- [Gürlebeck & Sprössig 1989] GÜRLEBECK, K. ; SPRÖSSIG, W.: *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*. Akademie-Verlag Berlin, Math. Research 56, 1989
- [Gürlebeck & Sprössig 1995] GÜRLEBECK, K. ; SPRÖSSIG, W.: Clifford-analysis and elliptic boundary value problems. In: ABLAMOWICZ, R. (Hrsg.) ; LOUNESTO, P. (Hrsg.): *Clifford algebras and spinor structures. A special volume dedicated to the memory of Albert Crumeyrolle (1919-1992)* Bd. 321, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995, S. 325–334
- [Gürlebeck & Sprössig 1997] GÜRLEBECK, K. ; SPRÖSSIG, W.: *Quaternionic calculus for engineers and physicists*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997
- [Gürlebeck & Viet 2008] GÜRLEBECK, K. ; VIET, T. Q.: On some complete systems of monogenic rational functions. In: SON, L. H. (Hrsg.) ; TUTSCHKE, W. (Hrsg.): *Function spaces in complex and Clifford analysis, Proceedings of the 14th international conference on finite or infinite dimensional complex analysis and applications (ICFICCA 2006)*, National University Publishers, 2008, S. 156–169
- [Gürlebeck 2008] GÜRLEBECK, N.: On Appell sets and the Fueter-Sce mapping. In: *Advances in Applied Clifford Algebras, Online first, DOI 10.1007/s00006-008-0126-3* (2008)
- [Heckel 1983] HECKEL, K.: *Einführung in die technische Anwendung der Bruchmechanik*. Carl Hanser Verlag, 1983

- [Irwin 1958] IRWIN, G. R.: *Fracture*. Handbuch der Physik Vol. VI, Springer Verlag, Berlin, 1958
- [Kolosov 1909] KOLOSOV, G. W.: *Über eine Anwendung der Theorie der Funktion einer komplexen Veränderlichen auf das ebene Problem der mathematischen Elastizitätstheorie (Russisch)*, Yuriew (Dorpat), Dissertation, 1909
- [Kolosov 1914] KOLOSOV, G. W.: Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 62 (1914), S. 383–409
- [Kravchenko 2003] KRAVCHENKO, V. V.: *Applied quaternionic analysis*. Heldermann: Lemgo/Germany, 2003
- [Kravchenko & Shapiro 1996] KRAVCHENKO, V. V. ; SHAPIRO, M. V.: *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Pitman Research Notes in Math. Ser. No.351. Longman: Harlow/Essex/UK, 1996
- [Krylov 1947] KRYLOV, N. M.: *Sur les quaternions de H.R. Hamilton et la notion de la monogenéité*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 55: 787–788, 1947
- [Love 1927] LOVE, A. E. H.: *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, 1927
- [Lu 1995] LU, J.: *Complex variable methods in plane elasticity*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1995
- [Malonek 1987] MALONEK, H. R.: *Zum Holomorphiebegriff in höheren Dimensionen*. Habilitationsschrift. Pädagogische Hochschule Halle, 1987
- [Malonek 1990] MALONEK, H. R.: Power series representation for monogenic functions in \mathbb{R}^{m+1} based on a permutational product. In: *Complex Variables, Theory Appl.* 15 (1990), Nr. 3, S. 181–191
- [Malonek & Falcão 2007] MALONEK, H. R. ; FALCÃO, M. I.: Special monogenic polynomials - Properties and applications. In: SIMOS, T. (Hrsg.) ; PSIHOS, G. (Hrsg.) ; TSITOURAS, C. (Hrsg.): *Numerical Analysis and Applied Mathematics* Bd. 936, American Institute of Physics, 2007, S. 764–767

- [Maxwell 1868] MAXWELL, J. C.: On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress. In: *Proc. London Math. Soc.* 2 (1868), S. 102–105
- [Maxwell 1927] MAXWELL, J. C.: *The scientific papers. Edited by W. D. Niven. Vol. I, Vol. II.* I: XXXII + 607 S.; II: VIII + 806 S. Photographic reprint by arrangement with the Cambridge University Press. Paris, J. Hermann, 1927
- [Mazya & Kozlov 2005] MAZYA, V. ; KOZLOV, V.: Asymptotic formula for solutions to elliptic equations near the Lipschitz boundary. In: *Ann. Mat. Pura Appl.* IV Ser. 184 (2005), Nr. 2, S. 185–213
- [Mazya & Rossmann 2004] MAZYA, V. ; ROSSMANN, J.: Schauder estimates for solutions to boundary value problems for second order elliptic systems in polyhedral domains. In: *Applied Analysis* 83 (2004), Nr. 3, S. 271–308
- [Mejlikhzhon 1948] MEJLIKHZHON, A. S.: *On the notion of monogeneous quaternions (Russisch)*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 59: 431–434, 1948
- [Meleshko 2003] MELESHKO, V. V.: Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. In: *Journal of Applied Mechanics* 56 (2003), Nr. 1, S. 33–85
- [Moes et al. 1999] MOES, N. ; DOLBOW, J. ; BELYTSCHKO, T.: A finite element method for crack growth without remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1999), Nr. 1, S. 131–150
- [Müller 1966] MÜLLER, C.: *Spherical harmonics*. Bd. 17. Springer-Verlag, Berlin, 1966
- [Muskhelishvili 1971] MUSKHELISHVILI, N. I.: *Einige Grundaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1971
- [Neuber 1934] NEUBER, H.: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie; der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik in der Mechanik* 14 (1934), S. 203–212
- [Neuber 1972] NEUBER, H.: Vollständigkeitsbeweis des Dreifunktionenansatzes der linearen Elastizitätstheorie. In: *Archive of Applied Mechanics* 41 (1972), Nr. 4, S. 232–234

- [Nicaise & Sändig 2007] NICAISE, S. ; SÄNDIG, A.-M.: Dynamic crack propagation in a 2D elastic body: The out-of-plane case. In: *J. Math. Anal. Appl.* 329 (2007), Nr. 1, S. 1–30
- [Papkovic 1932] PAPKOVIC, P.: Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par un vecteur et un scalaire harmonique (Russisch). In: *Bull. Acad. Sc. Leningrad* (1932), S. 1425–1435
- [Park & Sun 1995] PARK, S. B. ; SUN, C. T.: Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics. In: *International Journal of Fracture* 70 (1995), S. 203–216
- [Piltner 1982] PILTNER, R.: *Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen*, Ruhr-Universität Bochum, Dissertation, 1982
- [Piltner 1986] PILTNER, R.: Special finite elements with holes and internal cracks. In: *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 21 (1986), S. 1471–1485
- [Pimenov & Pushkarev 1991] PIMENOV, A. A. ; PUSHKAREV, V. I.: The use of quaternions to generalize the Kolosov-Muskhelishvili method to three-dimensional problems of the theory of elasticity. In: *Prikl. Matem. Mekhan.* 55 (1991), Nr. 3, S. 422–427
- [Polozhij 1973] POLOZHII, G. N.: Theory and application of the p-analytic and (p,q)-analytic functions (Russisch). In: *Naukova Dumka, Kiev* (1973)
- [Rolfe & Barson 1987] ROLFE, S. T. ; BARSON, J. M.: *Fracture and fatigue control in structures*. Applications of Fracture Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1987
- [Rossmann & Sändig 1996] ROSSMANN, J. ; SÄNDIG, A.-M.: Formulas for the coefficients in the asymptotics of solutions of boundary value problems for second order systems near edges. In: *Z. Angew. Math. Mech.* 76, Suppl. 4 (1996), S. 181–184
- [Sansone 1959] SANSONE, G.: *Pure and applied mathematics*. Bd. IX: *Orthogonal functions*. Interscience Publishers, New York, 1959

- [Sheffer 1945] SHEFFER, I. M.: Note on Appell polynomials. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), S. 739–744
- [Sosa 1991] SOSA, H.: Plane problems in piezoelectric media with defects. In: *International Journal of Solids and Structures* 28 (1991), S. 491–505
- [Spröckig 1978] SPRÖSSIG, W.: Räumliches Analogon zum komplexen T-Operator. In: *Beitr. Anal.* 12 (1978), S. 127–137
- [Spröckig 1993] SPRÖSSIG, W.: Quaternionic operator calculus and domain perturbation problems. In: BRACKX, F. (Hrsg.) ; DELANGHE, R. (Hrsg.) ; SERRAS, H. (Hrsg.): *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics* Bd. 55, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993, S. 233–240
- [Stein & Weiss 1968] STEIN, E. ; WEISS, G.: Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representation of the rotation group. In: *Amer. J. Math.* 90 (1968), S. 163–196
- [Sudbery 1979] SUDBERY, A.: Quaternionic analysis. In: *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 85 (1979), S. 199–225
- [Teixera & Ji 1996a] TEIXERA, J. A. ; JI, Z. Y.: Hybrid-Trefftz equilibrium model for crack problems. In: *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), S. 569–584
- [Teixera & Ji 1996b] TEIXERA, J. A. ; JI, Z. Y.: Hybrid-Trefftz finite element formulation for simulation of singular stress fields. In: *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), S. 281–308
- [Tong et al. 1973] TONG, P. ; PIAN, T. T. H. ; LASY, S. L.: A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. In: *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), S. 297–308
- [Trefftz 1926] TREFFTZ, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. In: *2. Internationaler Kongress für Technische Mechanik, Zürich, 1926*
- [Tsalik 1995] TSALIK, A.: Quaternionic representation of the 3D elastic and thermoelastic boundary problems. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 18 (1995), Nr. 9, S. 697–708

[Vocke 1969] VOCKE, W.: *Räumliche Probleme der linearen Elastizitätstheorie*.
VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1969

[Westergaard 1939] WESTERGAARD, H. M.: Bearing pressures and cracks. In:
Journal of Applied Mechanics 6 (1939), S. 49–53

Curriculum Vitae

Persönliche Informationen	Name	Sebastian Bock
	Adresse	Friedrich-Ebert-Str. 10 99423 Weimar
	Telefon	+49 3643 253227
	Email	sebastian.bock@uni-weimar.de
	Geburtsdatum	31.07.1978 in Schlema (Erzgeb.)
	Familienstand	ledig
Zivildienst	1997 - 1998	Helios Klinikum, Aue
Ausbildung	1985 - 1992	Grundschule, Zschorlau
	1992 - 1997	Clemens-Winkler Gymnasium, Aue
	05/1997	Abitur , Gesamtprädikat: gut
	1998 - 2004	Studium des Bauingenieurwesens, Bauhaus-Universität, Weimar
	2002 - 2003	Erasmus-Student, Universidade de Aveiro, Portugal
	2004	Diplomarbeit, Bauhaus-Universität Weimar, <i>Approximation mit polynomialen Lösungen der Laméschen Differentialgleichung</i>
	11/2004	Diplom Bauingenieur , Gesamtprädikat: sehr gut
Arbeitserfahrung und Praktika	07 - 09/1998	Praktikum, MultiBau GmbH, Aue
	08 - 09/2000	Praktikum, Baugeschäft Förster, Saubersdorf
	2001 - 2002	Studentische Hilfskraft, SFB 524 TP D3, Bauhaus-Universität, Weimar
	2000 - 2003	Studentische Hilfskraft, Institut für Mathematik/Physik, Bauhaus-Universität, Weimar
	01 - 04/2005	Forschungsstipendium, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal
	seit 2008	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Professur für Angewandte Mathematik, Bauhaus-Universität, Weimar
	seit 2009	Assoziierter Nachwuchswissenschaftler im Graduiertenkolleg 1462, Bauhaus-Universität, Weimar
Auszeichnungen	2005	Förderpreis des Vereins der Freunde des Bauingenieur- und Baustoffingenieurwesens der Bauhaus-Universität Weimar, 2. Preis für die Diplomarbeit
	2005 - 2007	Stipendium der Graduiertenförderung des Freistaates Thüringen

Publikationen

Zeitschriftenbeiträge

- [1] CAÇÃO, I.; GÜRLEBECK, K.; BOCK, S.: *On derivatives of spherical monogenics*, Complex Variables and Elliptic Equations, Volume 51, Pages 847-869, 2006.
- [2] BOCK, S.; FALCÃO, M.I.; GÜRLEBECK, K.; MALONEK, H.: *A 3-dimensional Bergman kernel method with applications to rectangular domains*, Computational and Applied Mathematics, Volume 189, Issues 1-2, Pages 67-79, 1 Mai 2006.
- [3] BOCK, S.; GÜRLEBECK, K.: *On a spatial generalization of the Kolosov-Muskhelishvili formulae*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 32, Pages 223 - 240, 2009.
- [4] BOCK, S.; GÜRLEBECK, K.: *On a polynomial basis generated from the generalized Kolosov-Muskhelishvili formulae*, Advances in Applied Clifford Analysis, Volume 19, Issue 2, Pages 191-209, 2009.
- [5] BOCK, S.; GÜRLEBECK, K.: *On a generalized Appell system and monogenic power series*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Online First, DOI 10.1002/mma.1213, 2009.

Konferenz- und Tagungsbeiträge

- [1] BOCK, S.; FALCÃO, M.I.; GÜRLEBECK, K.: *Applications of Bergman kernel functions*, In: GÜRLEBECK, K. (Hrsg.); HEMPEL, L. (Hrsg.); KÖNKE, C. (Hrsg.): *Proceedings of the 16th International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering (IKM)*, Weimar, 10-12 Juni 2003.
- [2] BOCK, S.: *Ein Algorithmus zur Schnittpunktbestimmung von kubischen Beziér-Kurven*, Forum Bauinformatik 2004, Technische Universität Braunschweig (ISBN 3-8322-3233-8).
- [3] CAÇÃO, I.; GÜRLEBECK, K.; BOCK, S.: *Complete orthonormal systems of spherical monogenics-A constructive approach*, In: LE HUNG SON (Hrsg.); TUTSCHKE, W. (Hrsg.); JAIN, S. (Hrsg.): *Methods of Complex and Clifford Analysis (Proceedings of ICAM Hanoi 2004)*, SAS International Publications (ISBN: 81-88296-01-5).
- [4] BOCK, S.; GÜRLEBECK, K.: *A coupled Ritz-Galerkin approach using holomorphic and anti-holomorphic functions*, In: GÜRLEBECK, K. (Hrsg.); KÖNKE, C. (Hrsg.): *Proceedings of the 17th International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering (IKM)*, Weimar, 12-14 Juli 2006.
- [5] BOCK, S.; GÜRLEBECK, K.: *On hypercomplex differential and primitivation operators with applications to representation formulae of linear elastostatics*, In: SIMOS, T.E. (Hrsg.); PSIHOYIOS, G. (Hrsg.); TSITOURAS, CH. (Hrsg.): *Numerical Analysis and Applied Mathematics* Bd. 936, American Institute of Physics, 2007, S. 717-720 (ISBN: 978-0-7354-0447-2).
- [6] BOCK, S.; GÜRLEBECK, K.: *On recurrence formulae of solid spherical monogenics*, In: SIMOS, T.E. (Hrsg.); PSIHOYIOS, G. (Hrsg.); TSITOURAS, CH. (Hrsg.): *Numerical Analysis and Applied Mathematics* Bd. 1048, American Institute of Physics, 2008, S. 638-648 (ISBN: 978-0-7354-0576-9).

- [7] BOCK, S.; GÜRLEBECK, K.: *On an Orthonormal Basis of Solid Spherical Monogenics Recursively Generated by Anti-Holomorphic \bar{z} -Powers* In: SIMOS, T.E. (Hrsg.); PSIHOYIOS, G. (Hrsg.); TSITOURAS, CH. (Hrsg.): *Numerical Analysis and Applied Mathematics* Bd. 1168, American Institute of Physics, 2009, S. 765-768 (ISBN: 978-0-7354-0709).

Sonstige Veröffentlichungen

- [1] BOCK, S.; FALCÃO, M.I.; GÜRLEBECK, K.; MALONEK, H.: *Numerical experiments with Bergman kernel functions in 2 and 3 dimensional cases*, Centro de Matemática, Universidade do Minho, Interne Veröffentlichungen-1/2003.